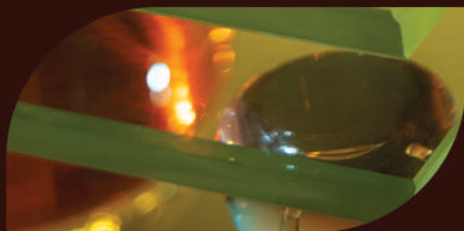


# Fundamentos matemáticos de diseño experimental para ingeniería

Moisés Arreguín Sámano  
Andrea Damaris Hernández-Allauca  
Mario Humberto Paguay Cuvi



ESPOCH  
2023

# **Fundamentos matemáticos de diseño experimental para ingeniería**

---

# Fundamentos matemáticos de diseño experimental para ingeniería I Parte

---

Moisés Arreguín Sámano  
Andrea Damaris Hernández- Allauca  
Mario Humberto Paguay Cuvi



**Dirección de  
Publicaciones**



**espoeh**

**Fundamentos matemáticos de diseño experimental para ingeniería**

**Parte I**

© 2023 Moisés Arreguín Sámano  
Andrea Damaris Hernández Allauca  
Mario Humberto Paguay Cuvi

© 2023 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½  
Instituto de Investigaciones  
Dirección de Publicaciones Científicas  
Riobamba, Ecuador  
Teléfono: 593 (03) 2 998-200  
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*)

Corrección y diseño:  
Editorial Politécnica ESPOCH

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la  
previa autorización por escrito de los propietarios del *Copyright*

CDU: 311 + 519.1

Electrostática

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Dirección de Publicaciones, 2023

195 pp. vol: 1 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-44-447-9

1. Investigación estadística

2. Probabilidad y estadística matemática



## PRÓLOGO

Con satisfacción, con orgullo y profesionalismo se ha cumplido la misión que la necesidad nos obligó en su momento el contar con una obra estadística tan importante que actualmente sirva como una herramienta muy valiosa para poder aplicarla de manera práctica en las diferentes circunstancias sobre los diseños experimentales utilizados sobre todo en la ingeniería. Esta labor fue muy ardua, porque se abordaron temas muy amplios y poco conocidos por la mayoría de los profesionales, que por las características de su actividad profesional requieren aplicar la experimentación

Para cumplir con las expectativas planteadas en esta obra, las cuales pretenden ilustrar al lector de una manera práctica, clara y amena, se abordan en primer lugar una introducción sobre lo que son los diseños experimentales, seguido de las pruebas de hipótesis y las pruebas de comparación de medias, para que finalmente y en base a los primeros temas, la obra concluya con la descripción de los diseños experimentales y los métodos paramétricos y no paramétricos, todo lo anterior aplicado a la ingeniería de una manera practica en base a las experiencias adquiridas por los autores en el desarrollo de su vida profesional.

## ÍNDICE GENERAL

PROLOGO	5
ÍNDICE GENERAL	6
INTRODUCCIÓN	9
CAPÍTULO I	11
INTRODUCCIÓN AL DISEÑO EXPERIMENTAL	11
1.1. Diseño experimental	11
1.2. Análisis de varianza	11
CAPÍTULO II	31
PRUEBA DE HIPÓTESIS	31
2.1. ¿Cómo se define una investigación?	31
2.1.1. Enfoque Cualitativo	36
2.1.2. Enfoque Cuantitativo	38
2.2. ¿Cuáles son las diferencias entre los enfoques cualitativo y cuantitativo?	39
2.3. ¿Qué es un diseño de investigación?	53
2.4. ¿Qué son los diseños experimentales?	54
2.5. ¿Qué son las hipótesis?	62
2.5.1. Características de una hipótesis	64
2.5.2. Tipos de hipótesis	65
2.5.3. ¿Cuál es la utilidad de las hipótesis?	73
2.5.4. ¿Qué es la prueba de hipótesis?	73
CAPÍTULO III	88
PRUEBAS DE COMPARACIÓN DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS	88
3.1. Gráficas	90
3.1.1. Histograma	90

3.1.2.	Gráficas de caja con bigotes ó Blox-Plot en inglés	91
3.1.3.	Gráficas de dispersión	92
3.1.4.	Gráficas de densidad de puntos	93
3.1.5.	Gráficas de sectores circulares	94
3.2.	Factores cualitativos	94
3.2.1.	Basadas en Distribución t	94
3.3.	Test de rangos múltiples	102
3.3.1.	Duncan o rangos múltiples de Duncan	102
3.3.2.	Student-Newman-Keuls (SNK) o Método de Keul	103
3.3.3.	Ryan, Einot and Gabriel and Welsch ó REGWF	104
3.3.4.	Tukey, diferencia significativa honesta ó honestly-significant-difference (HSD)	102
3.3.5.	Waller-Duncan's Bayesian k-ratio t-test ó Diferencia Mínima Significativa de Bayes	105
3.3.6.	Scheffé o minimum significant difference (MSD)	107
	CAPÍTULO IV	109
	FACTORES CUANTITATIVOS	109
4.1.	Contrastes ortogonales	109
4.1.1.	Superficie de respuesta	111
4.2.	Función de respuesta predicha	112
4.3.	Método gráfico	113
4.3.1.	Dominio y su representación grafica	113
4.4.	Series de Taylor y MacLaurin	117
4.5.	Funciones escalares de dos variables o Vectores R2	122
4.6.	Funciones escalares de tres variables, espacio tridimensional o vectores R3	130
4.7.	Polinomio de primer orden	152



4.7.1. Prueba de significancia de coeficientes estimados en modelo ajustado	152
4.7.2. Prueba de falta de ajuste	154
4.7.3. Máxima pendiente en ascenso	155
4.7.4. Algoritmo que determina coordenadas de un punto en trayectoria de máxima pendiente en ascenso	156
4.8. Polinomio de segundo orden	160
4.8.1. Localización de punto estacionario	160
4.8.2. Caracterización de la superficie de respuesta	162
4.8.3. Metodología de superficie de respuesta	172
4.9. Diseños experimentales para ajustar superficies de respuesta	173
4.9.1. Modelos o polinomios de primer orden	173
4.9.2. Diseños factoriales $2^k$	179
4.9.3. Fracciones de serie $2^k$	179
4.9.4. Diseños simplex	180
4.9.5. Diseños Plackett-Burman	180
4.9.6. Modelos de segundo orden	183
4.9.7. Diseño central compuesto	184
4.9.8. Diseño equirradial	187
4.9.9. Diseño Box-Behnken	187
4.10. Tendencias polinomiales o polinomios ortogonales	187
BIBLIOGRAFÍA	188

## INTRODUCCIÓN

El objetivo del Diseño Experimental es establecer relaciones causa-efecto entre una o más variables exógenas respecto a una o más variables endógenas con el fin de revelar las causas principales de variación en la respuesta, encontrar las condiciones experimentales con que se obtiene un valor extremo en la variable de interés, variabilidad controlada en laboratorio o *in situ* con el objeto de variar condiciones habituales de un proceso para aumentar la probabilidad de detectar cambios significativos en la respuesta, comparar respuestas con diferentes niveles de experimentación en variables controladas y estimar un modelo matemático-estadístico que permita hacer predicciones con un nivel de confiabilidad estadística e intervalos de confianza mínimos aceptables respecto a predicciones futuras, regresiones lineales simples o múltiples.

El libro “Fundamentos Matemáticos de Diseño experimental para Ingeniería- Parte I” presenta un orden progresivo de su conocimiento mediante los capítulos:

Capítulo I. Introducción al Diseño Experimental, expone qué es un diseño experimental, aplicaciones, usos y cómo se explica la variabilidad de tratamientos en una tabla de análisis de varianza -ANOVA-

En el Capítulo II. Pruebas de Hipótesis, explica que es una investigación, un diseño de investigación y qué son las hipótesis mediante sus características, tipos, utilidad y pruebas establecidas.

Capítulo III. Pruebas de Comparación de Medias de Tratamientos, abordan temáticas como: graficas, factores cualitativos y test de rangos múltiples: *Duncan* o rangos múltiples de *Duncan*, *Student-Newman-Keuls (SNK)* o Método de *Keul, Ryan, Einot and Gabriel and Welsch* ó *REGWF, Tukey*, diferencia significativa honesta ó *honestly-significant-difference (HSD)*, *Waller-Duncan's Bayesian k-ratio t-test* ó Diferencia Mínima Significativa de *Bayes, Scheffé* o *minimum significant difference (MSD)*.

Capítulo IV. Factores cuantitativos, desarrolla temas de: Contrastes ortogonales, Superficie de respuesta, Función de respuesta predicha, Método gráfico, Series de *Taylor y MacLaurin*, Funciones escalares de dos variables o Vectores  $R^2$ , Funciones escalares

de tres variables, espacio tridimensional o vectores  $R^3$ , Polinomio de primer orden y segundo orden, Diseños experimentales para ajustar superficies de respuesta, Modelos o polinomios de primer orden.

## CAPÍTULO I. 1. INTRODUCCIÓN AL DISEÑO EXPERIMENTAL

### 1.1 DISEÑO EXPERIMENTAL

Debido a la variabilidad de las variables, para evitar que un tratamiento sea favorecido o puesto en desventaja en forma sistemática en sus repeticiones, Fisher ideó la técnica de aleatoriedad, cuya finalidad es dar una estimación insesgada del error experimental. Es decir, la aleatoriedad tiende a destruir la correlación entre errores y hacer válidas las pruebas de significación. El ejemplo más palpable es la rifa de un objeto, pues si se colocan papeles o fichas numeradas en un recipiente y se supone que están completamente mezcladas, cualquier secuencia en que salgan se considera aleatoria. Cuando el investigador tiene pocos tratamientos recurre a esta técnica. No obstante, es recomendable usar una tabla de números aleatorios (Padrón, 2006).

### 1.2 ANÁLISIS DE VARIANZA

El Análisis de Varianza, ANOVA, ADEVA, ANDEVA, ANVA, AVAR, ANOVA de Fisher, Análisis de Varianza de Fisher ó, según terminología inglesa, Analysis of Variance es una prueba utilizada para contrastar la hipótesis que varias medias son iguales debido al uso de la distribución  $F$  de Fisher como parte de su contraste. Fueron ideadas por Sir Ronald Aylmer Fisher en 1925 y son una de las pruebas más importantes de la estadística actual.

Es una extensión de la prueba  $T$  para dos muestras independientes. Por tanto, sirve para estudiar la incidencia de una variable nominal u ordinal (categórica) con otras alternativas, con una variable de intervalo o de razón (cuantitativa). Si las medias de las poblaciones son iguales, las medias de muestras de grupos serán parecidas, por lo que las únicas diferencias serán las atribuidas al azar y el valor del estimador  $F$  será uno. Si las medias poblacionales son diferentes, el valor será mayor que uno, tal que será más alto conforme mayor sea la diferencia.

De acuerdo con Vicéns, Herrarte y Medina (2005), el análisis de varianza puede contemplarse como un caso especial de modelización econométrica, don-

de el conjunto de variables explicativas o exógenas son ficticias y la variable dependiente o endógena es continua. En estas situaciones, la estimación del modelo significa la realización de un ANOVA clásico, con amplia tradición y uso en estudios o diseños experimentales. Una ampliación a este planteamiento se presenta cuando se dispone de una variable de control que permita corregir el resultado del experimento mediante análisis de covarianza respecto a la variable de estudio. Entonces, se realiza un análisis de covarianza o, también, llamada ANCOVA.

El ANOVA parte de algunos supuestos o hipótesis que han de cumplirse:

- La variable dependiente debe medirse al menos a nivel de intervalo.
- Independencia de las observaciones.
- La distribución de los residuales debe ser normal.
- Homocedasticidad (homogeneidad de varianzas).

Los tipos de modelos que existen en ANOVA son:

- **Modelo I -Efectos fijos, Sistemático o Paramétrico:** Se aplica a situaciones en las que el experimentador ha sometido al grupo o material analizado a varios factores, cada uno de los cuales le afecta sólo a la media, permaneciendo la "variable respuesta" con una distribución normal.

Este modelo se supone cuando el investigador se interesa únicamente por los niveles del factor presentes en el experimento, por lo que cualquier variación observada en las puntuaciones se deberá al error experimental. Puede tomar pocos o muchos valores o niveles, a cada uno de los cuales se asignan los grupos o muestras. Si se toman  $K$  niveles del factor, a cada uno se asignan las muestras y las inferencias se refieren exclusivamente a los  $K$  niveles y no a otros que podrían haber sido incluidos, el ANOVA se llama de efectos fijos. El interés del diseño se centra en saber si esos niveles concretos difieren entre sí. Se aplican en investigaciones de Ciencias sociales.

- **Modelo II -Efectos aleatorios o Componentes de Varianza:** Los modelos de efectos aleatorios se usan para describir situaciones en que ocurren diferencias incomparables en material o grupo experimental. El ejemplo más simple es el de estimar la media desconocida de una población compuesta de individuos diferentes y en el que esas diferencias se mezclan con los errores del instrumento de medición.

Este modelo se supone cuando el investigador está interesado en una población de niveles, teóricamente infinitos del factor de estudio, de los que únicamente una muestra al azar ( $t$  niveles) están presentes en el experimento. Cuando los niveles son muchos y se seleccionan al azar  $K$  niveles, pero las inferencias se desean hacer respecto al total de niveles. La idea básica es que el investigador no tiene interés en niveles particulares del factor. Se aplican en diseños experimentales con muestras.

- **Modelo III o Efectos mixtos:** Cuando se utilizan dos factores, cada uno con varios niveles, uno de efectos fijos y otro de efectos aleatorios. Se aplica en casos con uno o más factores de clases anteriores.

Las principales partes o fracciones del Análisis de Varianza de Fisher pueden variar, según el Diseño Experimental que se trabaje. Sin embargo, el ANOVA está particionado en los siguientes componentes explicativos:

- **Factor de Variación o Variation factor:** indica el elemento o factor a estudiar dentro del ANOVA. Por ejemplo: Efecto total, Efecto tratamiento, Bloques (repeticiones), Factor A (Trat. 1rio), Parcela Grande, Sub Parcela, Error A, Factor B (Trat. 2rio), Error B, Factor C (Trat. 3rio), Error C, Interacciones doble AB, AC, BC, triple ABC, cuádruples ABCD, Prueba de Contrastes Ortogonales, Polinomios Ortogonales y/o Efecto Total.
- **Grados de libertad o Degrees of freedom:** Son el número de Contrastes Ortogonales menos el número de restricciones impuestas, que pueden hacerse en un grupo de datos. Los grados de libertad pueden descomponerse al igual que la suma de cuadrados en:

$Gl\ total = Gl\ entre\ grupos\ o\ Tratamientos + Gl\ dentro\ de\ grupos\ o\ Error;$  aunque, sus divisiones pueden aumentar según el diseño experimental que se trabaje. Por ejemplo: Efecto total, Efecto tratamiento, Bloques (repeticiones), Factor A (Trat. 1rio), Parcela Grande, Sub Parcela, Error A, Factor B (Trat. 2rio), Error B, Factor C (Trat. 3rio), Error C, Interacciones doble AB, AC, BC, triple ABC, cuádruples ABCD, Prueba de Contrastes Ortogonales, Polinomios Ortogonales y/o Efecto Total.

Simultáneamente, denota la significación entre tratamientos cuando se calcula o estima el cociente de dividir la suma de cuadrados entre el número de grados de libertad.

- **Suma de cuadrados o Sum of square:** indica la variación parcial o total de un conjunto de muestras de cada elemento o factor a estudiar dentro del ANOVA. Se puede descomponer en Suma de Cuadrados del Factor de estudio donde ( $SC_{(\text{Suma de Cuadrados de Factor, Tratamiento o Intergrupo})}$ ), número real relacionado con la varianza que mide la variación debida al "factor", "tratamiento" o tipo de situación estudiada, Suma de Cuadrados del Error de estudio ( $SC_{(\text{Suma de Cuadrados de Error o Intragrupo})}$ ), número real relacionado con la varianza que mide la variación dentro de cada "factor", "tratamiento" o tipo de situación y/o Suma de Cuadrados del Total de estudio ( $SC_{(\text{Suma de Cuadrados de Tratamiento})} + SC_{(\text{Suma de Cuadrados de Error})}$ ), número real relacionado con la varianza que mide la variación total.
- **F Calculada o F value:** El estadístico *F de Snedecor* está asociado a un nivel crítico de probabilidad de obtener valores, como el obtenido o mayores. Si éste es mayor al nivel de error asumido, habitualmente 95 % de confiabilidad estadística, error ó nivel de significancia ( $\alpha$ ) igual a 0,05, se interpreta "con base en los resultados obtenidos de datos muestrales (poblacionales), no se acepta la hipótesis nula, que indica igualdad de medias de tratamientos ( $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu (0)_{(\text{Media de Tratamiento})}$ )  $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots \tau_k = 0$ ) y no se rechaza la alternativa, que indica diferencia de al menos una media de tratamiento respecto al resto ( $H_a: \mu_i \neq \mu_j$  para algún  $i \neq j$  o  $H_a: \tau_i \neq 0$  para algún  $i$ )".

Con diferencia parcial respecto a Gujarati y Porter (2010) que afirman "con base en una prueba de significancia, como prueba t, se dice "aceptar" la hipótesis nula, todo lo que se afirma es que, con base en la evidencia dada por la muestra, no existe razón para rechazarla, no se sostiene que la hipótesis nula sea verdadera con absoluta certeza" y, de acuerdo con Kmenta (1971) y González (1985), "de la misma manera que un tribunal pronuncia un veredicto de "no culpable" en vez de "inocente", así la conclusión de una prueba estadística es "no rechazar" en vez de "aceptar". Esto se basa, en parte, en las siguientes razones:

- A) Wackerly, Mendenhall y Scheaffer (2010) señalan "la probabilidad  $\alpha$  recibe el nombre de nivel de significancia o, en forma más sencilla, nivel de prueba. Aun cuando se recomiendan con frecuencia pequeños valores de  $\alpha$ , el valor real  $\alpha$  para usar en un análisis es un tanto arbitrario. Sin embargo,  $\rho - value$  es el nivel de significancia alcanzado, relacionado con una prueba

ba y es un estadístico que representa el valor más pequeño de  $\alpha$  para el cual la información muestral indica que  $H_0$  puede ser rechazada. En cierto sentido,  $\rho$ -value permite al lector de la investigación evaluar la magnitud de la discrepancia entre los datos observados y  $H_0$ ”.

B) Navidi (2006) afirma “si se rechaza  $H_0$  se concluye que era falsa, en cambio si  $H_0$  no se rechaza no se concluye que  $H_0$  es verdadera, pues sólo se puede concluir que  $H_0$  es factible, pero nunca se puede llegar a la conclusión  $H_0$  es verdadera debido a que, por un lado, el estadístico de prueba es consistente con la hipótesis  $H_a$  y está un poco en desacuerdo con  $H_0$  tal que la única cuestión es si el nivel de desacuerdo medido con  $\rho$  – value es suficientemente grande para presentar  $H_0$  como no factible y, por otro lado.

Una regla general conveniente, considerando  $\rho$  – value como menor que un umbral específico, indica rechazar o no aceptar  $H_0$  cada vez que  $\rho \leq 0.05$ , interpretando que es “estadísticamente significativo”; aunque, este criterio no tiene ninguna base científica y, además, ésta es una mala práctica por varias razones:

- No proporciona ninguna manera de decir si  $\rho$  – value era apenas menor que 0,05 o si era mucho menor,
- Notificar que un resultado era estadísticamente significativo a un nivel de 5 % implica que hay gran diferencia entre  $\rho$  – value justo debajo de 0,05 y uno justo arriba de 0,05, cuando efectivamente hay una diferencia pequeña,
- Un trabajo así no permite al lector decidir por ellos mismos si  $\rho$  – value es suficientemente pequeño para rechazar o no aceptar  $H_0$ .
- Por ejemplo: Si un lector cree que  $H_0$  no debe rechazarse a menos que  $\rho < 0,01$  entonces informar solamente que  $\rho < 0,05$  no permite al lector determinar si rechaza o no acepta o acepta o no rechaza  $H_0$ ,
- Valores pequeños de  $\rho$  – value señalan que  $H_0$  es improbable que sea verdadera, tal que es tentador pensar que  $\rho$ -value representa la probabilidad que  $H_0$  sea verdadera. No obstante, la verdad o falsedad de  $H_0$  no se puede cambiar mediante la repetición del experimento; por lo tanto, no es correcto hablar de “probabilidad” que  $H_0$  sea verdadera,



- La clase de probabilidad que analiza si no se rechaza o no se acepta  $H_0$ , es útil solamente cuando se aplica a resultados que pueden resultar en formas diferentes cuando se repiten experimentos debido a que para definir el  $\rho$  - *value* como probabilidad de observar un valor extremo de un estadístico como  $\bar{X}$  (media aritmética o promedio), pues su valor podría ser diferente si el experimento se repite, se llama probabilidad frecuentista (la frecuencia de un suceso en una muestra se define como el cociente entre número de veces que ha ocurrido el suceso en la muestra y el tamaño de la misma).

Empíricamente, se observa que al ir aumentando el tamaño de una muestra, la frecuencia de sucesos tiende a estabilizarse en un número fijo tal que se ha denominado como ley de estabilidad de frecuencias o ley única del azar y ese número ideal, límite que alcanzaría la frecuencia de un suceso si se obtuviera una muestra infinita del experimento, es el primer concepto de probabilidad de un suceso<sup>1</sup>),

La probabilidad subjetiva<sup>2</sup> calcula la probabilidad que un enunciado, como  $H_0$ , sea verdadero y es importante en la teoría de Estadística Bayesiana (es un subconjunto del campo de la estadística en la que la evidencia sobre el verdadero estado del mundo se expresa en términos de grados de creencia o, más específicamente, las probabilidades bayesianas. Es sólo una de una serie de interpretaciones de la probabilidad y hay otras técnicas estadísticas que no se basan en "grados de creencia".

La inferencia bayesiana es un enfoque de la inferencia estadística, que es distinta de la inferencia frecuentista. Se basa específicamente en el uso de probabilidades bayesianas al resumir las pruebas. La formulación de modelos estadísticos para su uso en la estadística bayesiana tiene la característica

---

1 Esta interpretación, frecuentista desarrollada a partir de conceptos de probabilidad y se centra en el cálculo de probabilidades y contrastes de hipótesis, sigue siendo la más ampliamente usada y ha inspirado el desarrollo formal de la teoría del cálculo de probabilidades tal que la probabilidad de un suceso va ser una medida del subconjunto del espacio muestral que corresponde a este suceso y las interpretaciones de esa medida constituirán distintos modelos probabilísticos de la realidad. Por último, Triola (2004) afirma "si bajo un supuesto dado, la probabilidad de un suceso observado particular es excepcionalmente pequeña, concluimos que el supuesto probablemente no sea correcto".

2 Se basa en las creencias e ideas en que se realiza la evaluación de probabilidades y se define como en aquella que un evento asigna el individuo basándose en la evidencia disponible con base en su experiencia; es decir, es una forma de cuantificar, por medio de factores de ponderación individuales, la probabilidad de que ocurra cierto evento cuando no es posible de cuantificar de otra manera más confiable. Su fórmula de cálculo es  $\frac{N(\text{Número de eventos})}{N(\text{Total de eventos})}$ . Esta probabilidad puede tener la forma de frecuencia relativa de ocurrencia anterior o, simplemente, consistir en una conjetura inteligente N.

adicional, la cual no está presente en otros tipos de técnicas estadísticas, que requiere la formulación de un conjunto de distribuciones previas para los parámetros desconocidos, sus consideraciones habituales en diseño de experimentos se extienden en el caso de diseño Bayesiano de experimentos para incluir la influencia de las creencias anteriores y requiere ciertas técnicas computacionales modernas para la inferencia bayesiana, como diversos tipos de técnicas Monte Carlo de cadenas de Markov <sup>3)</sup> y

- Si un resultado tiene un  $\rho$  - *value* pequeño se dice que es “estadísticamente significativo”, representa “importante” y, en consecuencia, resulta tentador pensar que resultados estadísticamente significativos siempre son importantes. No obstante, a veces este tipo de resultados no tienen importancia científica o práctica.

Entonces, un resultado puede ser estadísticamente significativo sin ser lo suficientemente grande para tener importancia práctica, pues una diferencia es estadísticamente significativa cuando es grande comparada con su  $\sigma$  (desviación estándar de una población) o  $s$  (desviación estándar de una muestra) e, incluso, cuando  $\sigma$  o  $s$  es muy pequeña puede ser estadísticamente significativa.

Por lo tanto,  $\rho$  - *value* no mide la significancia práctica, sino el grado de confianza que se puede tener que el valor verdadero es muy diferente del valor especificado por  $H_0$  tal que cuando  $\rho$  - *value* es pequeño se tiene la confianza que el valor verdadero es, en verdad, muy diferente, pero no implica que la diferencia sea lo bastante grande para que tenga importancia práctica”.

- C) Lind, Marchal y Mason (2006) sostienen “en una prueba de hipótesis sólo se puede tomar una de dos decisiones: aceptar o rechazar  $H_0$ . En lugar de “aceptar”  $H_0$  algunos investigadores prefieren enunciar la decisión como “No se rechaza  $H_0$ ”, “No se puede rechazar  $H_0$ ” o, también, “Los resultados muestrales no permiten rechazar  $H_0$ . En pruebas de hipótesis  $\rho$ -value, proporciona la probabilidad de obtener, suponiendo que  $H_0$  sea verdadera, un valor muestral estadístico de prueba tan extremo, por lo menos o más extremo, como el obtenido tal que  $\rho$  - *value* compara la probabilidad con el nivel de significancia”. Por lo tanto, si no se acepta  $H_0$ , el siguiente paso

---

<sup>3</sup> Según Wackerly, Mendenhall y Scheaffer (2010), las pruebas de hipótesis se pueden abordar desde una perspectiva de Bayes con datos y parámetros para su distribución.

es efectuar la prueba de significancia entre medias de tratamientos con el fin de conocer cuál o cuáles son estadísticamente mejores.

- D) Triola (2004) afirma “estadístico de prueba es un valor calculado a partir de los datos muestrales, que se usa para tomar la decisión sobre rechazo de  $H_0$ . Por lo tanto, sirve para determinar si existe evidencia significativa en contra de  $H_0$ .  $\rho$  es la probabilidad de obtener un valor del estadístico de prueba que sea al menos tan extremo como el que representa a datos muestrales, suponiendo que  $H_0$  es verdadera.

Algunos libros dicen “aceptar  $H_0$ ” en vez de “no rechazar  $H_0$ ”, pero no se está probando  $H_0$ , sea que use el término “aceptar” o “no rechazar”, tal que únicamente se afirma que la evidencia muestral no es lo suficientemente fuerte como para justificar el rechazo de  $H_0$ . El término “aceptar” es un poco confuso, pues parece indicar incorrectamente que  $H_0$  ha sido aprobada tal que la frase “no rechazar” indica correctamente que la evidencia disponible no es lo suficientemente fuerte para justificar el rechazo de  $H_0$ ”

- **$Pr(>F)$  o  $\rho$  – value:** Es la probabilidad de observar un valor muestral tan extremo o más extremo que el valor observado dado que  $H_0$  es verdadera o es una manera de expresar la probabilidad de que  $H_0$  no sea verdadera.

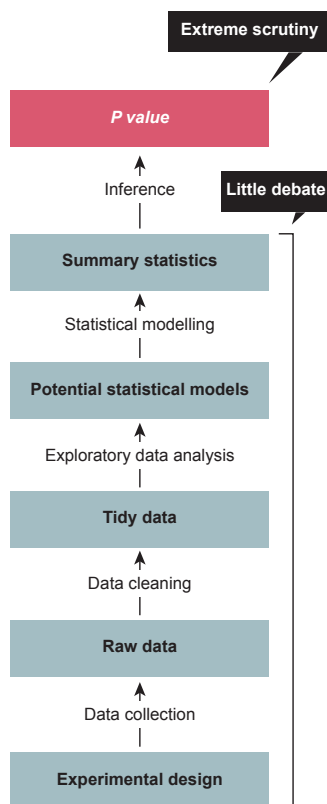
Complementariamente,  $Pr(>F)$  es el nivel de probabilidad que  $H_a$  caiga en la zona de rechazo o, complementariamente, no hay ninguna diferencia entre los dos grupos o no hay correlación entre un par de características.

Según Gujarati y Porter (2010),  $\rho$  – value, valor de probabilidad, nivel observado, exacto de significancia o probabilidad exacta de cometer error tipo I, estima la probabilidad real de obtener un valor del estadístico de prueba tan grande o mayor que el obtenido en un ejercicio o, en otras palabras, es el nivel de significancia más bajo al cual puede rechazarse una hipótesis nula, mientras que Leek, J. T. & Peng, R. D.(2015), afirman que  $Pr(>F)$  o  $\rho$  – value, es la cima del iceberg como muestra la figura 1:

Figura 1 Procesamiento de datos

### DATA PIPELINE

The design and analysis of a successful study has many stages, all of which need policing.



Fuente: Leek, J. T. & Peng, R. D.(2015)

Sin embargo, se afirma “no hay ninguna estadística más calumniada que el  $\rho$  – value. Incluso, investigadores que supervisan el análisis de datos sugieren tener la información completa, para evitar posibles problemas de comprensión de los resultados y problemas con el análisis, la exclusión de procesos involucrados en análisis de datos y comportamiento tal que para resolver este problema más profundo es estudiar cómo la gente realiza análisis de datos en el mundo real”. De acuerdo con la publicación “Estadísticos emiten alerta sobre mal uso de  $Pr (>F)$  o  $\rho$ -value” y Wasserstein, R. L. & Lazar, N. A.(2016), “el valor de P es una prueba común para juzgar la fuerza de la evidencia científica, contribuye al número de resultados de la investigación que no puede ser reproducido, la Asociación Estadística Americana (ASA) advierte en un comunicado publicado.

El grupo ha tomado el paso inusual de emitir principios para guiar el uso del  $\rho$  - *value*, que dice no se puede determinar si una hipótesis es verdadera o si los resultados son importantes.

En su comunicado, la ASA informa a los investigadores que eviten conclusiones científicas o a su vez tomar decisiones de política basadas solo en valores  $\rho$ . Los investigadores deben describir no sólo el análisis de datos que produjeron los resultados estadísticamente significativos, sino que también es necesario describir las pruebas y las decisiones en base a los cálculos realizados. Caso contrario, pueden parecer resultados falsamente robustos.

El valor más pequeño de  $\rho$  - *value* indica menos probabilidad que un conjunto observado de valores ocurra por casualidad, suponiendo que la hipótesis nula es verdadera. Un valor de  $\rho \leq 0,05$  se toma, generalmente, para expresar que un resultado es estadísticamente significativo y garantiza la publicación o hay 95 % de probabilidad que una hipótesis dada es correcta. Pero no es necesariamente verdadero, según notas de instrucción de ASA.

En cambio, significa si la hipótesis nula ( $H_0$ ) es verdadera y todos los otros supuestos son válidos, tal que hay un 5 % de probabilidad de obtener resultados al menos tan extremos como el observado. Un  $\rho$  - *value* no puede indicar la importancia de un resultado.

Según Lind, Marchal y Mason (2006),  $H_0$  se lee “H subíndice 0”, pues H significa hipótesis y el subíndice cero señala “no hay diferencia”. En cambio,  $H_1$  o  $H_a$ , leído como “H subíndice uno o a” señala que “al menos uno es diferente respecto al resto de los tratamientos”.

La demostración matemática que lo sustenta se encuentra a continuación y da razón que existan  $H_0$  y  $H_a$  en una prueba de dos colas. Además, con base en una muestra de una variable aleatoria X de ley  $P_\theta$  en decidir entre dos hipótesis:

$$H_0: \theta \in \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta \in \theta_1$$

donde:

$H_0$ : hipótesis nula o privilegiada

$H_1$ : hipótesis alternativa o alterna

$\theta_0, \theta_1$ : son los parámetros

tal que  $\theta_0 \cup \theta_1 = \theta$  y  $\theta_0 \cap \theta_1 = \emptyset$ .

Si  $d_0$  y  $d_1$  representan, respectivamente, las decisiones de no rechazar  $H_0$  o  $H_1$  y  $D = \{d_0, d_1\}$ .

Entonces: sea  $X: \Omega \rightarrow E \subseteq \mathbb{R}$  una variable aleatoria de ley  $P_{\theta}$ . Se llama “Prueba de Hipótesis Pura” o test puro a toda aplicación:  $\varnothing: E^n \rightarrow D$  tal que  $\varnothing$  equivale a particionar  $E^n$  en dos conjuntos:

- $W = \varnothing^{-1}(d_0) = \{x \in E^n: \text{si se observa } x, \text{ no se acepta } H_0\}$  y
- $W^c = \varnothing^{-1}(d_1) = \{x \in E^n: \text{si se observa } x, \text{ no se rechaza } H_0\}$ .

El nombre de  $H_0$  proviene que  $H_0$  se asumirá como verdadera, salvo que datos muestrales indiquen su falsedad. Nula debe entenderse como neutra.

**$H_0$  nunca se considera probada o demostrada, salvo estudiando todos los datos de la población,** puede diferir en un valor pequeño imperceptible para el muestreo, **que puede ser imposible; aunque, puede no ser aceptada por los datos.**

Con base en esto, **no se debe afirmar “se acepta  $H_0$ ”**, siendo lo correcto **“no se rechaza  $H_0$ ”** y, por abuso de lenguaje, es común hallar la expresión “se acepta la  $H_0$ ” en lugar de “no se rechaza  $H_0$ ”.

Generalmente,  $H_0$  se elige según el principio de simplicidad científica, que establece que únicamente se abandona un modelo simple a favor de otro más complejo cuando la evidencia a favor de este último sea fuerte. Por el carácter dicotómico, si no se acepta  $H_0$ , automáticamente no se rechaza  $H_1$ .

Finalmente, se llama **riesgo de primera especie a la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando es verdadera:**  $\alpha_0(\varnothing) = P_0(W)$ , mientras que el **riesgo de segunda especie es la probabilidad de aceptar  $H_0$  cuando es falsa:**  $\beta_\theta(\varnothing) = P_1(W^c) = 1 - P_1(W)$ .

Considerando que:

$W$ : Región crítica de prueba

$W^c$ : Región de aceptación

$P_0, P_1$ : probabilidad

Se llama “Potencia de una prueba” a la probabilidad de no aceptar  $H_0$  cuando es falsa  $-P_1(W) = 1 - \beta_\theta(\varnothing)-$  y, también, se denomina “Nivel de significación de una prueba” al valor  $\alpha = \sup_{\theta \in \theta_0} \alpha_\theta(\varnothing)$ .

Cuando  $\theta \subseteq \mathbb{R}$  se estudian problemas del tipo:

$$P_0: \begin{cases} H_0: \theta = \theta_0, \\ H_1: \theta = \theta_1 \text{ con } \theta_0 \neq \theta_1' \end{cases}$$

donde;

$\theta_0$ : Prueba de cola izquierda

$\theta_1$ : Prueba de cola derecha

$$P_1: \begin{cases} H_0: \theta \leq \theta_0, \\ H_1: \theta > \theta_0' \end{cases}$$

$$P_2: \begin{cases} H_0: \theta \geq \theta_0, \\ H_1: \theta < \theta_0' \end{cases}$$

$$P_3: \begin{cases} H_0: \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \\ H_1: \theta < \theta_0 \text{ ó } \theta > \theta_1 (\theta_0 < \theta_1)' \end{cases}$$

$$P_4: \begin{cases} H_0: \theta < \theta_0 \text{ o } \theta > \theta_1, \\ H_1: \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \end{cases} \quad \circ$$

$$P_5: \begin{cases} H_0: \theta = \theta_0, \\ H_1: \theta \neq \theta_1 \end{cases}$$

El **teorema Neyman-Pearson** indica que, el contexto de prueba  $\forall \alpha \in [0,1]$ ,  $\epsilon$  un test puro  $\emptyset$ , de nivel  $\alpha$ , de potencia máxima, definido por la región crítica:

$$W = \left\{ x \in E^n : \frac{L(\theta_0, x)}{L(\theta_1, x)} \leq k \right\} \rightarrow k \quad \text{se determina de la condición } \alpha = P_0(W).$$

$L$  representa la función de verosimilitud y  $x$  una observación de la muestra. Otras pruebas importantes, de nivel  $\alpha$ , son:

$$A): \begin{cases} H_0: \mu > \mu_0, \\ H_1: \mu \leq \mu_0 \end{cases} \text{ y}$$

$$B): \begin{cases} H_0: \mu < \mu_0, \\ H_1: \mu \geq \mu_0 \end{cases} \text{ (Capa, 2015).}$$

Una vez que se han calculado los grados de libertad, sumas de cuadrados, medias cuadráticas o cuadrados medios,  $F$  de Fisher o distribución  $F$  de Snedecor y Probabilidad que caiga en la región de rechazo ( $Pr(>F)$ ), *Rho value* o *valor Ro* ( $\rho$  - *value*), se procede a elaborar la "Tabla 1 de Análisis de varianza y el Método

interpretativo o Pruebas de Significación Estadística de ANOVA en la Tabla 2" con base en sus principales elementos, como Diseño Experimental Irrestringido al Azar o Completamente Aleatorizado:

Tabla 1 Análisis de Varianza

Análisis de Varianza o ANOVA para Diseño Completamente al Azar (DCA)						
F. de V. (Factor de Variación) o VF (Variation factor)	Gl (Grados de Libertad) o Df (Degrees of freedom)	SC (Suma de Cuadrados) o Sum Sq (sum of square)	CM (Cuadrado Medio) o Mean Sq (mean squares)	F (calculada) o F value (calculated F)	Pr (> F) o p - Value	
Total	(rt - 1)	$\left[ \sum_{i=1}^{rt} X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{rt} X_i \right)^2 / rt \right]$				
Intergrupo o Tratamiento	(t - 1)(gl numerador)	$\sum_{i=1}^t \left( \sum_{j=1}^r X_{ij} \right)^2 / r - FC$	SC / gl (numerador)	C. M. Trat C. M. Error	$\frac{gl(\text{numerador})}{gl(\text{denominador})}$	
Intragrupo o Error	t(r - 1)(gl denominador)	Total - Tratamiento	SC / gl (denominador)			

Fuente: Elaboración propia con base en modificaciones de González, B. G. (2010) y Hurtado, M. J. & Gómez, F. R. (2010)



A continuación, se presentan los criterios de lectura de ANOVA o Análisis de Varianza:

Tabla 2 Método interpretativo

Método interpretativo o Pruebas de Significación Estadística de ANOVA		Ventajas	Desventajas
Criterio	Orden	Interpretación	
Indicio o Nocional	$\bar{X}_i > \bar{X}_n$	<p>Si la media aritmética o promedio de un tratamiento es mayor que la media general se tiene un indicio que no se acepta hipótesis nula, que indica igualdad de medias de tratamientos:</p> <p><math>(H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu(0) \text{ o } H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots \tau_k = 0)</math>,</p> <p>pues es un síntoma que existe un efecto de un tratamiento y no se rechaza la alternativa, que indica diferencia de al menos una media de tratamiento respecto al resto</p> <p><math>(H_a: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j \text{ o } H_a: \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i)</math></p>	Da una idea de cuál o cuáles tratamientos son mejores en la investigación
	$\bar{X}_i < \bar{X}_n$	<p>Si la media aritmética o promedio de un tratamiento es menor que la media general se tiene un indicio que no se rechaza hipótesis nula, que indica igualdad de medias de tratamientos:</p> <p><math>(H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu(0) \text{ o } H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots \tau_k = 0)</math> y no se acepta la alternativa, que indica diferencia de al menos una media de tratamiento respecto al resto</p> <p><math>(H_a: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j \text{ o } H_a: \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i)</math></p>	No siempre se cumple
	$SC_{\text{Tratamientos}} > SC_{\text{Error}}$	Si Suma de Cuadrados de Tratamientos ( <i>Sum Sq o Sum Square</i> ) es mayor que Suma de Cuadrados del Error se tiene un indicio que no	

Método interpretativo o Pruebas de Significación Estadística de ANOVA			Ventajas	Desventajas
Criterio	Orden	Interpretación		
		<p>se acepta hipótesis nula, que indica igualdad de medias de tratamientos:</p> <p><math>(H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu (0) \text{ o } H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_k = 0)</math> y no se rechaza la alternativa, que indica diferencia de al menos una media de tratamiento respecto al resto</p> <p><math>(H_a: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j \text{ o } H_a: \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i)</math></p>		
		<p>Si Suma de Cuadrados de Tratamientos (<i>Sum Sq</i> o <i>Sum Square</i>) es menor que Suma de Cuadrados del Error se tiene un indicio que no se rechaza la hipótesis nula, que indica igualdad de medias de tratamientos:</p> <p><math>(H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu (0) \text{ o } H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_k = 0)</math> y no se acepta la alternativa, que indica diferencia de al menos una media de tratamiento respecto al resto</p> <p><math>(H_a: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j \text{ o } H_a: \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i)</math></p>		
	$SC_{Tratamientos} < SC_{Error}$			
	$CME_{Tratamientos} > CME_{Error}$			

Método interpretativo o Pruebas de Significación Estadística de ANOVA			Ventajas	Desventajas
Criterio	Orden	Interpretación		
		<p><math>(H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu(0) \text{ o } H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_k = 0)</math> y no se rechaza la alternativa, que indica diferencia de al menos una media de tratamiento respecto al resto</p> <p><math>(H_a: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j \text{ o } H_a: \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i)</math></p> <p>Si Cuadrados Medios de Tratamientos (<i>Mean Sq</i> o <i>Mean Square</i>) es menor que Cuadrados Medios del Error se tiene un indicio que no se rechaza hipótesis nula, que indica igualdad de medias de tratamientos:</p> <p><math>(H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu(0) \text{ o } H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_k = 0)</math> y no se acepta la alternativa, que indica diferencia de al menos una media de tratamiento respecto al resto</p> <p><math>(H_a: \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j \text{ o } H_a: \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i)</math></p>		
Formal	$CME_{Tratamientos} < CME_{Error}$ $ T_{Calculada}  >  T_{Tablas}(\alpha, k-1) $ $ \chi^2_{Calculada}  >  \chi^2_{Tablas} $	<p>Si <math>\chi^2_{Calculada}</math>, <math>T_{Calculada}</math> (<i>T value</i>) o <math>F_{Calculada}</math> (<i>F value</i>) es mayor que <math>\chi^2_{Tablas}</math>, <math>T_{Tablas}</math> de Student o <math>F_{Tablas}</math> de Fisher</p> <p>Donde:</p> <p><math>\alpha</math>: Tamaño de error o nivel de significancia</p> <p><math>k-1</math>: Grados de libertad del numerador</p> <p><math>N-k</math>: Grados de libertad del denominador.</p>	Es el criterio de lectura más riguroso de una ANOVA	Confusión en su interpretación cuando no se tiene claro su significado y cómo leerlo correctamente

Método interpretativo o Pruebas de Significación Estadística de ANOVA			Ventajas	Desventajas
Criterio	Orden	Interpretación		
	$ F_{Calculada}  >$ $ F_{Tablas}(\alpha, k-1, N-k) $	<p>Se tiene el criterio más formal y/o riguroso de lectura de una ANOVA que no se acepta hipótesis nula, que indica igualdad de medias de tratamientos:</p> <p><math>(H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu(0) \text{ o } H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_k = 0)</math></p> <p>y no se rechaza la alternativa, que indica diferencia de al menos una media de tratamiento respecto al resto (<math>H_a: \mu_i \neq \mu_j</math> para algún <math>i \neq j</math> o <math>H_a: \tau_i \neq 0</math> para algún <math>i</math>)</p>		
	$ T_{Calculada}  <$ $ T_{Tablas}(\alpha, k-1) $	<p>Si <math>\chi^2_{Calculada}</math>, <math>T_{Calculada}</math> (<math>T</math> value) o <math>F_{Calculada}</math> (<math>F</math> value) es menor que <math>\chi^2_{Tablas}</math>, <math>T_{Tablas}</math> de Student o <math>F_{Tablas}</math> de Fisher</p> <p>Donde:</p> <p><math>\alpha</math>: Tamaño de error o nivel de significancia</p> <p><math>k-1</math>: Grados de libertad del numerador</p> <p><math>N-k</math>: Grados de libertad del denominador</p> <p>Se tiene el criterio más formal y/o riguroso de lectura de una ANOVA que no se rechaza la hipótesis nula, que indica igualdad de medias de tratamientos:</p> <p><math>(H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu(0) \text{ o } H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_k = 0)</math></p>		
	$ \chi^2_{Calculada}  <$ $ \chi^2_{Tablas} $			

Método interpretativo o Pruebas de Significación Estadística de ANOVA		Ventajas	Desventajas
Criterio	Orden	Interpretación	
	$ F_{calculada}  <$ $ F_{Tablas}(\alpha, k-1, N-k) $	<p>y no se acepta la alternativa, que indica diferencia de al menos una media de tratamiento respecto al resto (<math>H_a: \mu_i \neq \mu_j</math> para algún <math>i \neq j</math> o <math>H_a: \tau_i \neq 0</math> para algún <math>i</math>)<sup>4</sup></p>	
	$\rho - value$ o $Pr(> F)$	<p><math>\rho - value</math> es la probabilidad de observar un valor muestral tan extremo o más extremo que el valor observado dado que la <math>H_0</math> es verdadera, o es una manera de expresar la probabilidad que <math>H_0</math> no sea verdadera o, según Galindo (2006), “mínimo valor del nivel de significación para que datos observados indican que <math>H_0</math> será rechazada”.</p> <p>Complementariamente, <math>Pr(&gt; F)</math> es el nivel de probabilidad que <math>H_a</math> caiga en la zona de rechazo. Las investigaciones sociales usualmente trabajan con <math>\alpha = 0,10</math> o <math>90\%</math> de confiabilidad</p>	<p>Confusión en su interpretación</p>

4 Un conjunto generador se representa a partir que los vectores  $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n$  de un espacio vectorial  $V$  genera a  $V$  si todo vector en  $V$  se puede escribir como una combinación lineal de los mismos; es decir,  $\forall v \in V_{(\text{Espacio Vectorial})}$   $\varepsilon$  escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \dots + \alpha_n v_n$ . Además, un espacio generado por un conjunto de vectores se genera a partir que sea  $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_k$   $k$  vectores de un espacio vectorial  $V$ . El espacio generado por  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_k\}$  es el conjunto de combinaciones lineales  $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_k$  es decir,  $gen\{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_k\} = \{v \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \dots + \alpha_k v_k\}$ . Por lo tanto, se dice que es **LINEALMENTE DEPENDIENTE** (L.D.O.D.L.en inglés) si sean  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \dots + \alpha_n v_n$ ,  $n$  vectores en espacio vectorial  $V$  tal que los vectores son linealmente dependientes si existen  $n$  escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$  **NO TODOS SON IGUALES A CERO**; es decir, con algún  $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ . Caso contrario, estos serán **LINEALMENTE INDEPENDIENTES** (L.I.O I.L.en inglés) tal que, la única combinación lineal que da cero en la TRIVIAL es  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Método interpretativo o Pruebas de Significación Estadística de ANOVA		
Criterio	Orden	Interpretación
		<p>estadística, Diseños Experimentales con <math>\alpha \leq 0,05</math> o 95 % de confiabilidad estadística, Control de Calidad <math>\alpha \leq 0,01</math> o 99 % de confiabilidad estadística y Control de Calidad con <math>6\sigma</math> <math>\alpha \leq 0,001</math> o <math>\geq 99,9</math> % de confiabilidad estadística<sup>5</sup>.</p>
		<p>Si <math>\rho - \text{value} &lt; 0,10</math> se tiene alguna evidencia que <math>H_0</math> no es verdadera. En cambio, <math>Pr(&gt; F)</math> indica que hay 10 % de probabilidad que <math>H_a</math> caiga en zona de rechazo ó 90 % de confiabilidad estadística que <math>H_a</math> caiga en zona de no rechazo.</p>
		<p>Si <math>\rho - \text{value} &lt; 0,05</math> se tiene evidencia fuerte que <math>H_0</math> no es verdadera. En cambio, <math>Pr(&gt; F)</math> indica que hay 5 % de probabilidad que <math>H_a</math> caiga en zona de rechazo ó 95 % de confiabilidad estadística que <math>H_a</math> caiga en zona de no rechazo.</p>
		<p>Si <math>\rho - \text{value} &lt; 0,01</math> se tiene evidencia muy fuerte que <math>H_0</math> no es verdadera. En cambio, <math>Pr(&gt; F)</math> indica que hay 1 % de probabilidad</p>

Ventajas

Desventajas

Es complementario al criterio más riguroso de lectura de una ANOVA

cuando no se tiene claro su significado y cómo leerlo correctamente

5 Lind, Marchal y Mason (2006) afirman “no hay un nivel de significancia que se aplique a todas las pruebas. Se usa 0.05, enunciado como nivel del 5%, nivel 0.01 o 0.10 o cualquier otro nivel entre 0 y 1. Tradicionalmente, se usa un nivel de 0.05 para proyectos de investigación sobre consumo, nivel 0.01 para aseguramiento de calidad y nivel 0.10 para encuestas políticas”.

Método interpretativo o Pruebas de Significación Estadística de ANOVA			Ventajas	Desventajas
Criterio	Orden	Interpretación		
		<p>que <math>H_a</math> caiga en zona de rechazo ó 99 % de confiabilidad estadística que <math>H_a</math> caiga en zona de no rechazo.</p> <p>Si <math>\rho - value &lt; 0,001</math> se tiene evidencia extremadamente fuerte que <math>H_0</math> no es verdadera. En cambio, <math>P_T(&gt; F)</math> indica que hay 0,1 % de probabilidad que <math>H_a</math> caiga en zona de rechazo ó 99,9 % de confiabilidad estadística que <math>H_a</math> caiga en zona de no rechazo.</p>		

Fuente: Elaboración propia con base en modificaciones de González, B. G. (2010) y Hurtado, M. J. & Gómez, F. R. (2010)

## CAPÍTULO II. 2. PRUEBA DE HIPÓTESIS

### 2.1. ¿CÓMO SE DEFINE UNA INVESTIGACIÓN?

La investigación es un conjunto de procesos sistemáticos, críticos y empíricos que se aplican al estudio de un fenómeno. No obstante, a lo largo de la Historia de la Ciencia han surgido diversas corrientes de pensamiento (Hernández, Fernández y Baptis, 2010):

- **Empirismo.** El empirismo es una corriente filosófica opuesta al racionalismo que surge en Inglaterra en el siglo XVII y que se extiende durante el siglo XVIII y cuyos máximos representantes son: J. Locke (1632-1704), J. Berkeley (1685-1753) y D. Hume (1711-1776). Lleva a cabo una saludable autocrítica de la razón, delimita sus límites y restringió sus posibilidades asentándola en el ámbito de la experiencia. En otras palabras, empirismo es toda teoría que considera que la experiencia es el origen del conocimiento, pero no tiene límite.

Las características fundamentales del empirismo podrían resumirse en:

- Subjetivismo del conocimiento. Se afirma que para conocer el mundo se ha de partir del propio sujeto, no de la realidad en sí. Si lo primero en el orden del conocimiento son las ideas, éstas habrán de tener un origen distinto a la propia mente (tesis racionalista). Su validez objetiva le vendrá de las cosas mismas.
- La experiencia como única fuente del conocimiento. El origen del conocimiento es la experiencia, entendida como la percepción de objetos sensibles externos (cosas) y operaciones internas de la mente, como emociones, sensaciones, etcétera.
- Negación de ideas innatas de racionalistas. Si todo conocimiento ha de provenir de la experiencia esto supone que habrá de ser adquirido. La mente no posee contenido alguno (ideas innatas), sino que es como una “tabla rasa”, un receptáculo vacío que debe “llenarse” a partir de



experiencia y aprendizaje.

- El conocimiento humano es limitado, siendo la experiencia su límite. Postura radicalmente opuesta a la de racionalistas, para lo que la razón, utilizando un método adecuado, no tiene límites y podría llegar a conocerlo todo. Los empiristas restringen la capacidad de la mente humana a la experiencia como su límite y más allá de ella no es lícito ir si no se quiere caer en el error, atribuyéndole a todo lo que no ha sido “experimentado” una realidad y existencia objetiva.
- Negación del valor objetivo de conceptos universales. Empiristas aceptarán el postulado nominalista que los conceptos universales no hacen la referencia a ninguna realidad en sí (objetiva), sino que son meros nombres que se designan a un conjunto de ideas particulares o “percepciones” simples que se encuentran vinculadas entre sí. Cualquier idea compleja ha de ser explicada por combinación y mezcla de ideas simples.
- Método experimental y ciencia empírica. El interés por hallar un método adecuado que dirija el pensamiento fue uno de los intereses principales tanto del racionalismo como del empirismo. Su diferencia estriba en que para los racionalistas el modelo ideal de método era matemático y deductivo, mientras que para empiristas debía ser experimental e inductivo, similar al de Newton en el campo de la física. Sin embargo, la ciencia no puede basarse en hipótesis o presupuestos no contrastados con la experiencia, su validez depende de su verificación empírica.
- Predicados, como bueno o malo, no se dan en la experiencia. Se conocen las cosas y sus cualidades físicas, pero las cualidades morales o estéticas no pueden percibirse, no tienen valor cognoscitivo, sino que la guía para la vida humana es el sentimiento.
- **Materialismo Dialéctico.** Es la corriente del materialismo filosófico de acuerdo a los planteamientos originales de Engels y Marx que posteriormente fueron enriquecidos por Vladimir I. Lenin y después sistematizados por miembros de la Academia de las Ciencias de la Unión Soviética principalmente. Esta corriente filosófica define la materia como el sustrato de toda realidad sea concreta o abstracta (pensamientos), emancipa la primacía e independencia de la materia ante la conciencia y lo espiritual,

declara la cognoscibilidad (posibilidad de ser conocido) del mundo en virtud de su naturaleza material y aplica la dialéctica –basada en las leyes dialécticas propuestas por Hegel– para interpretar el mundo, superando así al materialismo mecanicista. Para el materialismo dialéctico las ideas tienen un origen físico, esto es, lo primero es la materia y la conciencia lo derivado.

Como tal, el materialismo dialéctico se apoya en los datos, resultados y avances de las ciencias y su esencia se mantiene en correspondencia y vigencia con la tradicional orientación progresista del pensamiento racional científico. Marx planteaba que la forma de conocer el mundo se podía hacer desde dos procesos distintos, el primero consiste en ir de la práctica a la teoría regresando a la práctica o iniciando por la teoría yendo a la práctica regresando a la teoría.

Teoría-practica-teoría o practica-teoría-practica. En conclusión, el materialismo dialéctico no es otra cosa que el método científico de los comunistas en el mundo, método por el cual se llega a conocer el mundo, a entender las contradicciones internas y externas, a conocer las causas y cada una de las cosas como son a partir de la ciencia, dejando de lado al idealismo.

Las categorías del materialismo son:

- Esencia y fenómeno.
- Causa y efecto.
- Necesidad y casualidad.
- Ley.
- Contenido y forma.
- Posibilidad y realidad.
- Singular, particular e individual.
- Abstracto y concreto.
- Histórico y lógico.
- Materialismo e idealismo.
- Práctica y contradicción.
- Teoría y práctica.
- Cambio y movimiento.
- **Positivismo.** El positivismo es una corriente compleja de pensamiento

que dominó gran parte de la cultura europea en sus manifestaciones filosóficas, políticas, pedagógicas, historiográficas y literarias, como el ve-rismo y el naturalismo, en un período que cubre aproximadamente desde 1840 hasta llegar casi al inicio de la primera guerra mundial.

Sus representantes más significativos son: Auguste Comte (1798-1857) en Francia, John Stuart Mill (1806-1873) y Herbert Spencer (1820-1903) en Inglaterra, Jakob Moleschott (1822-1893) y Ernst Haeckel (1834-1919) en Alemania, así como Roberto Ardigó (1828-1920) en Italia.

En cualquier caso, a pesar de tal diversidad, en el positivismo existen unos rasgos fundamentales de carácter común, que permiten calificarlo como corriente unitaria de pensamiento:

- El positivismo reivindica el primado de la ciencia: sólo conocemos aquello que nos permite conocer las ciencias y el único método de conocimiento es el propio de las ciencias naturales.
- El método de las ciencias naturales, descubrimiento de las leyes causales y el control que éstas ejercen sobre los hechos, no sólo se aplica al estudio de la naturaleza, sino también al estudio de la sociedad.
- La sociología -entendida como la ciencia de aquellos «hechos naturales» constituidos por las relaciones humanas y sociales- es un resultado característico del programa filosófico positivista.
- Positivismo no sólo da la afirmación de la unidad del método científico y de la primacía de dicho método como instrumento cognoscitivo, sino que se exalta la ciencia en cuanto único medio en condiciones de solucionar en el transcurso del tiempo todos los problemas humanos y sociales que hasta entonces habían atormentado a la humanidad.
- La época del positivismo se caracteriza por un optimismo general, que surge de la certidumbre en un progreso imparable concebido en ocasiones como resultado del ingenio y del trabajo humano y en otros casos como algo necesario y automático, que avanza hacia condiciones de bienestar generalizado, en una sociedad pacífica y penetrada de solidaridad entre los hombres.
- En el caso del positivismo; sin embargo, sería la ciencia la que resultaría

elevada a la categoría de infinito.

- Existen determinados temas fundamentales que proceden de la tradición ilustrada, como es el caso de la tendencia a considerar que los hechos empíricos son la única base del verdadero conocimiento, la fe en la racionalidad científica como solucionadora de los problemas de la humanidad, o incluso la concepción laica de la cultura, entendida como construcción puramente humana, sin ninguna dependencia de teorías y supuestos teológicos.
- Siempre en líneas generales el positivismo se caracteriza por una confianza acrítica y a menudo expeditiva y superficial en la estabilidad y en el crecimiento sin obstáculos de la ciencia. Dicha confianza acrítica se transformó en un fenómeno consuetudinario.
- **Fenomenología.** Se compone de las voces griegas *φαινόμενον* (*fainómenon*), que significa ‘fenómeno, lo que se manifiesta, lo que se muestra’ y *λόγος* (*lógos*), ‘estudio, tratado’. Es la doctrina filosófica que estudia lo que aparece tal y como se presenta en la conciencia, sin recurrir a teoría, deducción o suposiciones procedentes de otras disciplinas tales como las ciencias naturales; es decir, los fenómenos. Fue iniciada por el filósofo J.H. Lambert (1728-1777), al investigar sobre el tema de las apariencias. En la modernidad surge en el siglo XX en Alemania con Husserl. “La fenomenología es el estudio de la ciencia del fenómeno, puesto que todo aquello que aparece es fenómeno.

La fenomenología es una ciencia de objetos ideales, por tanto, a priori y universal, porque es ciencia de las vivencias. “Es una ciencia esencialmente nueva, alejada del pensar natural, por lo que tiene de peculiar y por desarrollarse sólo en nuestros días se llama a sí misma ciencia de fenómenos”. El lema de este movimiento es el plegarse a las cosas mismas, el ser fiel a lo que realmente se experimenta, de ahí que propugne la intuición como instrumento fundamental de conocimiento.

La intuición es la experiencia cognoscitiva en la cual el objeto conocido se nos hace presente, se nos muestra “en persona”, experiencia opuesta al mentar o referirse a un objeto con el pensamiento meramente conceptual. A diferencia de las corrientes empiristas, la fenomenología no limita la intuición al mundo perceptual, sino que acepta varias formas de darse las

cosas, varias formas de intuición: cada objetividad se muestra de distinto modo a la conciencia, en función de su propio ser o esencia: las cosas físicas se hacen presentes a nuestra conciencia de otro modo que los objetos matemáticos, las leyes lógicas, los valores estéticos, los valores éticos o las propias vivencias.

- **Estructuralismo.** Es un movimiento heterogéneo que inicialmente aparece como una metodología científica, convirtiéndose luego en una ideología filosófica que pretende elaborar teorías objetivas y verificables, a través del control científico a las ciencias del espíritu. El estructuralismo es un enfoque de las ciencias humanas que creció hasta convertirse en uno de los métodos más utilizados para analizar el lenguaje, la cultura y la sociedad en la segunda mitad del siglo XX. En general, es un enfoque filosófico que trata, de un modo, afrontar las ciencias humanas, de analizar un campo específico como un sistema complejo de partes relacionadas entre sí. Jean Piaget ha definido las estructuras a través de tres características:
  - Totalidad, pues posee más propiedades que elementos.
  - Transformaciones, posee un equilibrio dinámico.
  - Auto-regulación, pues supone un sistema de transformaciones autorreguladas por un sistema cerrado.

Sin embargo, debido a las diferentes premisas que las sustentan, desde el siglo pasado tales corrientes se han “polarizado” en dos aproximaciones principales para indagar debido a que ambos enfoques emplean procesos cuidadosos, metódicos y empíricos en su esfuerzo para generar conocimiento:

### 2.1.1. Enfoque Cualitativo

El enfoque cualitativo de investigación se enmarca en el paradigma científico naturalista, el cual, también es denominado naturalista-humanista o interpretativo, y cuyo interés “se centra en el estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social”

La investigación cualitativa asume una realidad subjetiva, dinámica y com-

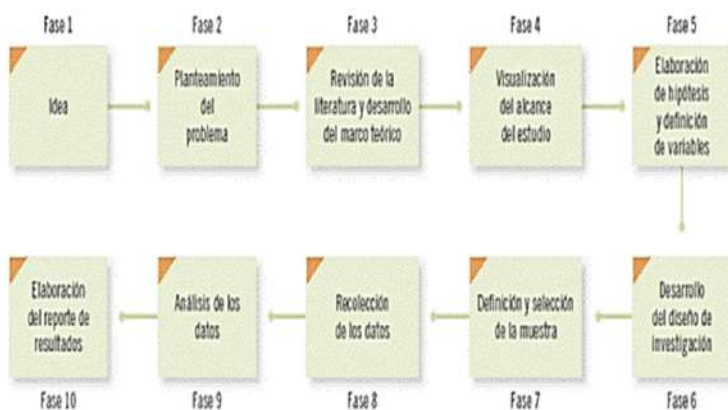
puesta por multiplicidad de contextos. El enfoque cualitativo de investigación privilegia el análisis profundo y reflexivo de los significados subjetivos e intersubjetivos que forman parte de las realidades estudiadas.

Es importante aclarar lo siguiente: aunque el enfoque cualitativo se orienta hacia la interpretación de realidades subjetivas, la investigación cualitativa no deja de ser científica, y lo es tanto como la investigación basada en el enfoque cuantitativo; dicha interpretación tampoco se reduce a un asunto de opiniones de quien investiga (Abarca, Alpizar, Sibaja y Rojas, 2013, p. 10).

De esta manera, sin dejar de gozar de carácter científico, la investigación cualitativa parte de postulados propios del paradigma científico naturalista, los cuales determinan las características particulares del proceso investigativo con enfoque cualitativo.

Usa la recolección de datos para probar hipótesis, con base en la medición numérica y el análisis estadístico, para establecer patrones de comportamiento y probar teorías. Parte de una idea, que va acotándose y, una vez delimitada, se derivan objetivos y preguntas de investigación, se revisa la literatura y se construye un marco o una perspectiva teórica. De las preguntas se establecen hipótesis y determinan variables; se desarrolla un plan para probarlas (diseño); se miden las variables en un determinado contexto; se analizan las mediciones obtenidas (con frecuencia utilizando métodos estadísticos) y se establece una serie de conclusiones respecto de la(s) hipótesis que se muestran en la figura 2.

Figura 2 Fases del Enfoque Cualitativo  
Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)



### 2.1.2. Enfoque Cuantitativo

Las características del enfoque cuantitativo son:

- El investigador o investigadora plantea un problema de estudio delimitado y concreto. Sus preguntas de investigación versan sobre cuestiones específicas.
- Una vez planteado el problema de estudio, el investigador o investigadora considera lo que se ha investigado anteriormente (la revisión de la literatura) y construye un marco teórico (la teoría que habrá de guiar su estudio), del cual deriva una o varias hipótesis (cuestiones que va a examinar si son ciertas o no) y las somete a prueba mediante el empleo de los diseños de investigación apropiados. Si los resultados corroboran las hipótesis o son congruentes con éstas, se aporta evidencia en su favor. Si se refutan, se descartan en busca de mejores explicaciones y nuevas hipótesis.
- Las hipótesis (por ahora denominémoslas creencias) se generan antes de recolectar y analizar los datos.
- La recolección de los datos se fundamenta en la medición (se miden las variables o conceptos contenidos en las hipótesis). Esta recolección se lleva a cabo al utilizar procedimientos estandarizados y aceptados por una comunidad científica. Como en este enfoque se pretende medir, los fenómenos estudiados deben poder observarse o referirse en el “mundo real”.
- Debido a que los datos son producto de mediciones se representan mediante números (cantidades) y se deben analizar a través de métodos estadísticos.
- En el proceso se busca el máximo control para lograr que otras explicaciones posibles distintas o “rivales” a la propuesta del estudio (hipótesis), sean desechadas y se excluya la incertidumbre y minimice el error. Es por esto que se confía en la experimentación y/o las pruebas de causa-efecto.
- Los análisis cuantitativos se interpretan a la luz de las predicciones iniciales (hipótesis) y de estudios previos (teoría). La interpretación constituye una explicación de cómo los resultados encajan en el conocimiento existente (Creswell, 2005).
- La investigación cuantitativa debe ser lo más “objetiva” posible. Los fenómenos que se observan y/o miden no deben ser afectados por el investi-

gador. Éste debe evitar en lo posible que sus temores, creencias, deseos y tendencias influyan en los resultados del estudio o interfieran en los procesos y que tampoco sean alterados por las tendencias de otros (Williams, Grinnell y Unrau 2005).

- Los estudios cuantitativos siguen un patrón predecible y estructurado (el proceso) y se debe tener presente que las decisiones críticas se efectúan antes de recolectar los datos.
- En una investigación cuantitativa se pretende generalizar los resultados encontrados en un grupo o segmento (muestra) a una colectividad mayor (universo o población). También se busca que los estudios efectuados puedan replicarse.
- Al final, con los estudios cuantitativos se intenta explicar y predecir los fenómenos investigados, buscando regularidades y relaciones causales entre elementos. Esto significa que la meta principal es la construcción y demostración de teorías (que explican y predicen).
- Para este enfoque, si se sigue rigurosamente el proceso y, de acuerdo con ciertas reglas lógicas, los datos generados poseen los estándares de validez y confiabilidad, y las conclusiones derivadas contribuirán a la generación de conocimiento.
- Esta aproximación utiliza la lógica o razonamiento deductivo, que comienza con la teoría y de ésta se derivan expresiones lógicas denominadas hipótesis que el investigador busca someter a prueba.
- La investigación cuantitativa pretende identificar leyes universales y causales (Bergman, 2008).

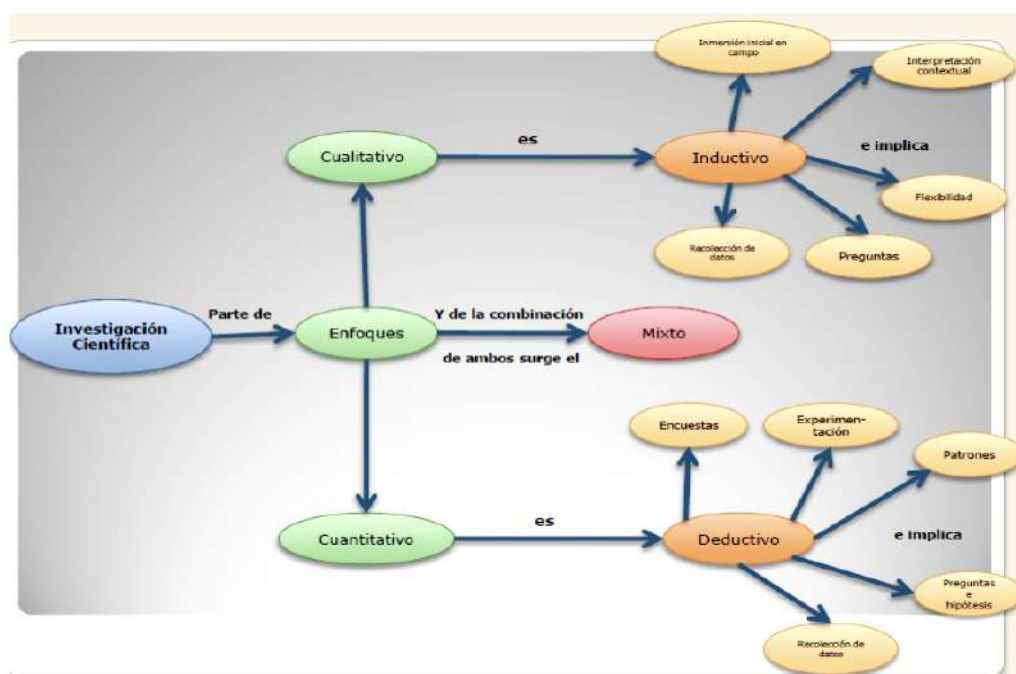
## **2.2. ¿CUÁLES SON LAS DIFERENCIAS ENTRE LOS ENFOQUES CUALITATIVO Y CUANTITATIVO?**

El enfoque cualitativo busca principalmente “dispersión o expansión” de los datos e información, se basa en estudios previos, se utiliza para consolidar las creencias (formuladas de manera lógica en una teoría o un esquema teórico), establece con exactitud patrones de comportamiento en una población y la reflexión es el puente que vincula al investigador y a los participantes (Mertens, 2005).



El enfoque cuantitativo pretende intencionalmente “acotar” la información (medir con precisión las variables del estudio, tener “foco”), su estudio se fundamenta primordialmente en sí mismo y se usa para construir creencias propias sobre el fenómeno estudiado como lo sería un grupo de personas únicas, en la figura 3 se observa las fases del enfoque cualitativo.

Figura 3 Fases del Enfoque Cualitativo



Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

La tabla 3 muestra un cuadro comparativo de los enfoques según sus distintas definiciones o dimensiones:

Tabla 3 Comparativo de enfoques

Definiciones o dimensiones	Tipo de enfoque	
	Cuantitativo	Cualitativo
Marcos generales de referencia básicos.	Positivismo, neopositivismo y positivismo.	Fenomenología, constructivismo, naturalismo e interpretativismo.
Punto de partida	Hay una realidad que conocer, puede hacerse mediante la mente.	Hay una realidad que descubrir, construir e interpretar. La realidad es la mente.

Definiciones o dimensiones	Tipo de enfoque	
	Cuantitativo	Cualitativo
Realidad a estudiar	Existe una realidad objetiva única. El mundo es concebido como externo al investigador.	Existen varias realidades subjetivas construidas en la investigación, que varían en su forma y contenido entre individuos, grupos y cultura. El investigador parte de la premisa que el mundo social es “relativo” y sólo puede ser entendido desde el punto de vista de los actores estudiados, tal que el mundo es construido por el investigador.
Naturaleza de la realidad	La realidad no cambia por las observaciones y mediciones realizadas.	La realidad sí cambia por las observaciones y recolección de datos.
Objetividad	Busca ser objetivo.	Admite subjetividad.
Metas de investigación	<p>Describir, explicar y predecir los fenómenos –causalidad–.</p> <p>Generar y probar teorías.</p>	Describir, comprender e interpretar los fenómenos mediante percepciones y significados producidos por experiencias de participantes.
Lógica	Se aplica la lógica deductiva, de lo general a lo particular o de las leyes y teoría a los datos.	Se aplica la lógica inductiva, de lo particular a lo general o de datos a las generalizaciones no estadística y la teoría.
Relación entre ciencias físicas-naturales y sociales	Las ciencias físicas-naturales y sociales son una unidad. A las ciencias sociales puede aplicar los principios de ciencias naturales.	Las ciencias físicas-naturales y sociales son diferentes. No se aplican los mismos principios.
Posición personal del investigador	Neutral, pues el investigador “hace a un lado” sus propios valores y creencias. La posición de la investigación es “imparcial”, intenta asegurar procedimientos rigurosos y “objetivos” de recolección y análisis de datos, así como evitar que sus sesgos y tendencias influyan en los resultados.	Explícita, pues el investigador reconoce sus propios valores y creencias, incluso son parte del estudio.

Definiciones o dimensiones	Tipo de enfoque	
	Cuantitativo	Cualitativo
Interacción física entre investigador y fenómeno	Distancia, separada.	Próxima, suele haber contacto.
Interacción psicológica entre investigador y fenómeno	Distancia, lejana, neutral, sin involucramiento.	Cercana, próxima, empática, con involucramiento.
Papel de fenómenos estudiados –objetos, seres vivos, etcétera-.	Los papeles son más bien pasivos.	Los papeles son más bien activos.
Relación entre investigador y fenómeno estudiado	De independencia y neutralidad, o se afectan. Se separan	De interdependencia, se influyen. No se separan.
Planteamiento del problema	Delimitado, acotado, específico. Poco flexible.	Abierto, no es delimitado o acotado. Muy flexible.
Uso de teoría	La teoría se usa para ajustar sus postulados al mundo empírico.	La teoría es un marco de referencia.
Generación de teoría	La teoría es generada de comparar la investigación previa con resultados del estudio, pues se consideran una extensión de estudios antecedentes.	La teoría no se fundamenta en estudios anteriores, sino se generan o construyen de datos empíricos obtenidos y analizados.
Papel de revisión de literatura	La literatura representa un papel crucial, guía la investigación. Es fundamental para definición de teoría, hipótesis, diseño y demás etapas del proceso.	La literatura desempeña un papel menos importante al inicio, es relevante en el desarrollo del proceso. En ocasiones, provee de dirección, tal que el rumbo señala principalmente la evolución de eventos durante el estudio y aprendizaje que se obtiene de participantes. El marco teórico o estado del arte o revisión bibliográfica es un elemento que ayuda a justificar la necesidad de investigar un problema planteado. Algunos autores del enfoque cualitativo consideran que su rol es sólo auxiliar.
La revisión de la literatura y variables o conceptos de estudio	El investigador hace una revisión de literatura principalmente para buscar variables significativas que puedan ser medidas.	El investigador más se que fundamentarse en revisión de literatura para seleccionar y definir las variables o conceptos clave del estudio, confía en el proceso mismo de investigación para identificarlos y descubrir cómo se relacionan.

Definiciones o dimensiones	Tipo de enfoque	
	Cuantitativo	Cualitativo
Hipótesis	Se prueban hipótesis. Se establecen para aceptarlas o no aceptarlas –rechazarlas- dependiendo del grado de certeza –probabilidad-.	Se generan hipótesis durante el estudio o al final.
Diseño de investigación	Estructurado, predeterminado –precede a la recolección de datos-.	Abierto, flexible, construido durante el trabajo de campo o realización de estudio.
Población-muestra	Su objetivo es generalizar datos de una muestra a una población –de grupo pequeño a uno mayor-.	Usualmente, no se pretende generalizar resultados obtenidos en la muestra hacia una población.
Muestra	Se involucra a muchos sujetos en investigación, pues se pretende generalizar los resultados del estudio.	Se involucra a unos cuantos sujetos, pues no se pretende necesariamente generalizar resultados del estudio.
Composición de la muestra	Casos que en conjunto son estadísticamente representativos.	Casos individuales, representativos no desde el punto de vista estadístico.
Naturaleza de los datos	La naturaleza de los datos es: cuantitativa –numéricos-.	La naturaleza de los datos es: cualitativa –textos, narraciones, significados, etcétera.
Tipos de datos	Datos confiables y duros –hard-.	Datos profundos y enriquecedores –soft-.
Recolección de datos	Su recolección se basa en instrumentos estandarizados. Es uniforme para todos los casos, Los datos se obtienen por observación, medición y documentación de mediciones. Se usan instrumentos que han demostrado ser válidos y confiables en estudios previos o se generan nuevos basados en revisión literaria, se prueban y ajustan.	Su recolección está orientada a proveer un mayor entendimiento de significados y experiencias de personas. El investigador es el instrumento de recolección de datos, se auxilia de diversas técnicas que se desarrollan durante el estudio. Entonces, la recolección de datos no se inicia con instrumentos preestablecidos, sino que el investigador comienza a aprender por observación y descripciones de participantes y concibe formas para registrar datos que se van refinando conforme avanza la investigación.

Definiciones o dimensiones	Tipo de enfoque	
	Cuantitativo	Cualitativo
Concepción de participantes en recolección de datos	Los participantes son fuentes externas de datos.	Los participantes son fuentes internas de datos. El investigador también es uno de ellos.
Finalidad del análisis de datos	Describir variables y explicar sus cambios y movimientos.	Comprender a personas y sus contextos.
Características del análisis de datos	Es sistemático, usando intensivamente Estadística descriptiva e inferencial. Se basa en variables. Es impersonal. Es posterior a la recolección de datos.	Análisis varía dependiendo del modo en que hayan sido recolectado los datos. Se fundamenta en la inducción analítica. Hace uso moderado de estadística –conteo y algunas operaciones aritméticas. Se basa en casos o personas y sus manifestaciones. Es simultáneo a la recolección de datos. Su análisis consiste en describir información y desarrollar temas.
Forma de datos para analizar	Los datos son representativos en forma de números que son analizados estadísticamente.	Los datos son en forma de textos, imágenes, piezas audiovisuales, problemarios u objetos personales.
Proceso de análisis de datos	El análisis se inicia con ideas preconcebidas, basadas en hipótesis formuladas. Recolectados los datos numéricos se transfieren a una matriz, analizada mediante procedimientos estadísticos.	El análisis no se inicia con ideas preconcebidas sobre cómo se relacionan los conceptos o variables. Reunidos datos verbales, escritos y/o audiovisuales se integran en una base de datos compuesta por texto y/o elementos visuales, analizados para determinar significados y describir el fenómeno estudiado desde el punto de vista de sus actores. Se integran descripciones de personas con las del investigador.
Perspectiva del investigador en análisis de datos	Es externa, al margen de datos. El investigador no involucra sus antecedentes y experiencias en análisis. Mantiene distancia a éste.	Es interna, desde los datos, pues el investigador involucra en su análisis sus propios antecedentes y experiencias, así como la relación que tuvo con participantes del estudio.

Definiciones o dimensiones	Tipo de enfoque	
	Cuantitativo	Cualitativo
Principales criterios de evaluación en recolección y análisis de datos	Objetividad, rigor, confiabilidad y validez.	Credibilidad, confirmación, valoración y transferencia.
Presentación de resultados	Tablas, diagramas y modelos estadísticos. El formato de presentación es estándar.	El investigador usa variedad de formatos para reportar sus resultados: narraciones, fragmentos de textos, videos, audios, fotografías, mapas, diagramas, matrices y modelos conceptuales. Prácticamente, el formato varía en cada estudio.
Reporte de resultados	Sus reportes usan un tono objetivo, impersonal y no emotivo.	Sus reportes usan un tono personal y motivo.

La comparación de las etapas de investigación de los procesos cuantitativo y cualitativo son (Creswell, 2005):

Procesos fundamentales del proceso general de investigación	Características cuantitativas	Características cualitativas
Planteamiento del problema	Orientación hacia descripción, predicción y explicación	Orientación hacia exploración, descripción y entendimiento
	Específico y acotado	General y amplio
	Dirigido hacia datos medibles u observables	Dirigido a experiencias de participantes
Revisión de literatura	Rol fundamental	Rol secundario
	Justificación para planteamiento y necesidad del estudio	Justificación para planteamiento y necesidad del estudio
Recolección de datos	Instrumentos predeterminados	Datos emergen poco a poco
	Datos numéricos	Datos en texto o imagen
	Número considerable de casos	Número relativamente pequeño de casos
Análisis de datos	Análisis estadístico	Análisis de textos y material audiovisual
	Descripción de tendencias, comparación de grupos o relación entre variables	Descripción, análisis y desarrollo de temas
	Comparación de resultados con predicciones y estudios previos	Significado profundo de resultados
Reporte de resultados	Estándar y fijo	Emergente y flexible
	Objetivo y sin tendencias	Reflexivo y con aceptación de tendencias

Asimismo, ambos utilizan, en términos generales, cinco fases similares y relacionadas entre sí:

- Realizan observación y evaluación de fenómenos.
- Establecen suposiciones o ideas como consecuencia de la observación y evaluación realizadas.
- Demuestran el grado en que las suposiciones o ideas tienen fundamento.
- Revisan tales suposiciones o ideas con base en pruebas o análisis.
- Proponen nuevas observaciones y evaluaciones para esclarecer, modificar y fundamentar suposiciones e ideas, incluso generar otras.

**Ejemplos:** Un(a) estudiante se encuentra interesado(a) en saber qué factores intervienen para que una persona sea definida y percibida como “atractiva y conquistadora” (que cautiva a individuos del género opuesto y logra que se sientan atraídos hacia él o ella y se enamoren). Entonces, decide llevar a cabo un estudio (su idea para investigar) en su escuela.

Bajo el enfoque cuantitativo-deductivo, el estudiante plantearía su problema de investigación definiendo su objetivo y su pregunta (lo que quiere hacer y lo que quiere saber).

Por ejemplo, el objetivo podría ser: “conocer los factores que determinan que una persona joven sea percibida como atractiva y conquistadora”, y la pregunta de investigación: “¿qué factores determinan que una persona joven sea percibida como atractiva y conquistadora”? Precisaría su problema de investigación; seleccionaría una teoría que explicara de manera satisfactoria —sobre la base de estudios previos— la atracción física y psicológica, la percepción de atributos y cualidades deseables en personas del género opuesto y el enamoramiento en las relaciones entre jóvenes; asimismo, y de ser posible, establecería una o varias hipótesis.

**Por ejemplo:** “los chicos y las chicas que logran más conquistas amorosas y son percibidos(as) como más ‘atractivos(as)’ resultan ser aquellos(as) que tienen mayor prestigio social en la escuela, que son más seguros(as) de sí mismos(as) y más extravertidos(as)”.

Bajo el enfoque cualitativo-inductivo, más que revisar las teorías sobre ciertos factores, lo que haría el estudiante sería sentarse en la cafetería a observar a chicos y

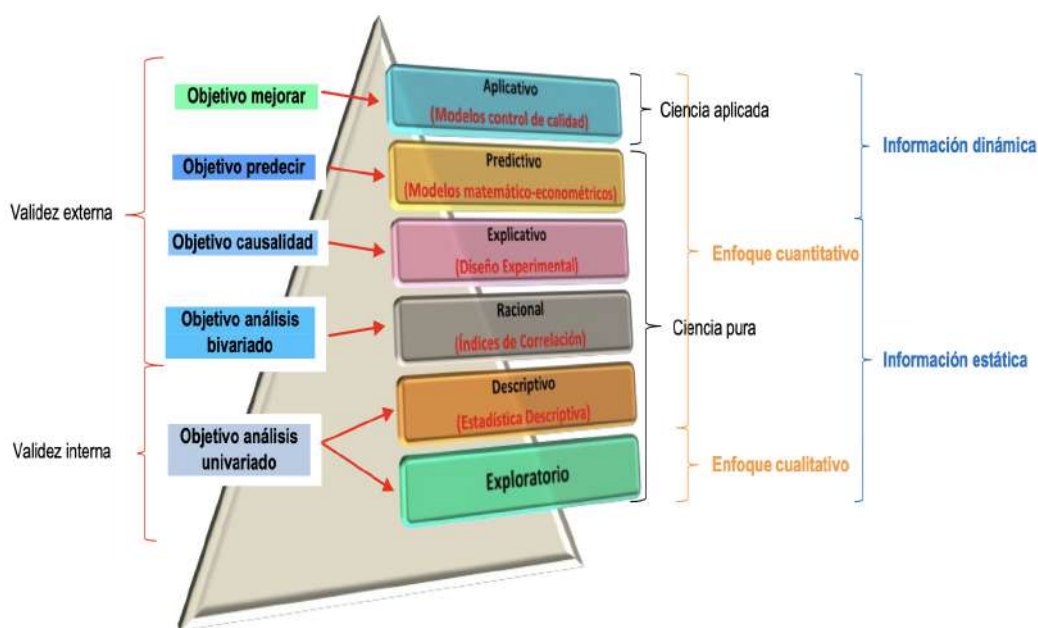
chicas que tienen fama de ser atractivos y conquistadores. Observaría a la primera persona joven que considere tiene esas características, la analizaría y construiría un concepto de ella (¿cómo es?, ¿cuáles son sus características?, ¿cómo se comporta?, ¿cuáles son sus atributos y cualidades?, ¿de qué forma se relaciona con los demás?).

Asimismo, sería testigo de cómo conquista a compañeras(os). Así, obtendría algunas conclusiones. Posteriormente haría lo mismo (observar) con otras personas jóvenes. Poco a poco entendería por qué son percibidos esos compañeros(as) como atractivos(as) y conquistadores(as).

De ahí, podría derivar algún esquema que explique las razones por las cuales estas personas conquistan a otras.

La figura 4 muestra los tipos de investigación según sus características, mientras que en la tabla 4 se detallan dichas características:

Figura 4 Tipos de investigación



Fuente: Elaboración propia con base en modificaciones de “TEMA 3 Tipos de investigación” (6)



Tabla 4 Tipos de investigación

Ciencia	Enfoque	Información	Nivel	Alcance	Validez	Investigaciones		Valor
						Objetivo	Propósito	
Aplicada			Sexto	Aplicativo (Modelos control de calidad)		Mejorar	Plantear resolver problemas o intervenir en la historia natural de la enfermedad. Enmarca a la innovación técnica, artesanal e industrial como la científica. Las técnicas estadísticas del control de calidad apuntan a evaluar el éxito de la intervención sobre la población en cuanto a: proceso, resultados e impacto.	Análisis de datos para la investigación aplicada, investigación intervencionista o investigación acción. Descubre los procedimientos estadísticos para la investigación cuya finalidad es lograr una modificación positiva en la realidad, evalúa, monitorea y controla los procesos productivos con visión científica.
				Predictivo (Modelos matemático-económicos)		Externa	Predecir	Se encarga de la estimación probabilística de eventos generalmente adversos, de ocurrencia o en función al tiempo como el tiempo de vida media. Se aplican técnicas de análisis predictivos. Por ejemplo, la regresión de Cox, series de tiempo o datos de panel, Modelo de rezagos distribuidos, análisis de supervivencia de Kaplan Meier y los riesgos de Hazard.
Pura o básica	Cuantitativo	Dinámica	Quinto					

Ciencia	Enfoque	Información	Nivel	Alcance	Validez	Investigaciones		Valor
						Objetivo	Propósito	
			Cuarto	Explicativo (Diseño Experimental)		Causalidad	Está dirigida a responder por las causas de los eventos y fenómenos físicos o sociales, determina causas de fenómenos, genera un sentido de entendimiento y es sumamente estructurado. Se enfoca en explicar por qué ocurre un fenómeno y en qué condiciones se manifiesta, o por qué se relacionan dos o más variables.	Se encuentra más estructurado que las demás investigaciones (de hecho implica los propósitos de éstas); además de que proporciona un sentido de entendimiento del fenómeno a que hacen referencia.
		Estática	Tercero	Relacional (Índices de Correlación)		Análisis Bivariado	Su finalidad es conocer la relación o grado de asociación que exista entre dos o más conceptos, categorías o variables en un contexto en particular, ofrecen predicciones, explica la relación entre variables y cuantifica relaciones entre variables.	En cierta medida tiene un valor explicativo, aunque parcial, ya que el hecho de saber que dos conceptos o variables se relacionan aporta cierta información explicativa.

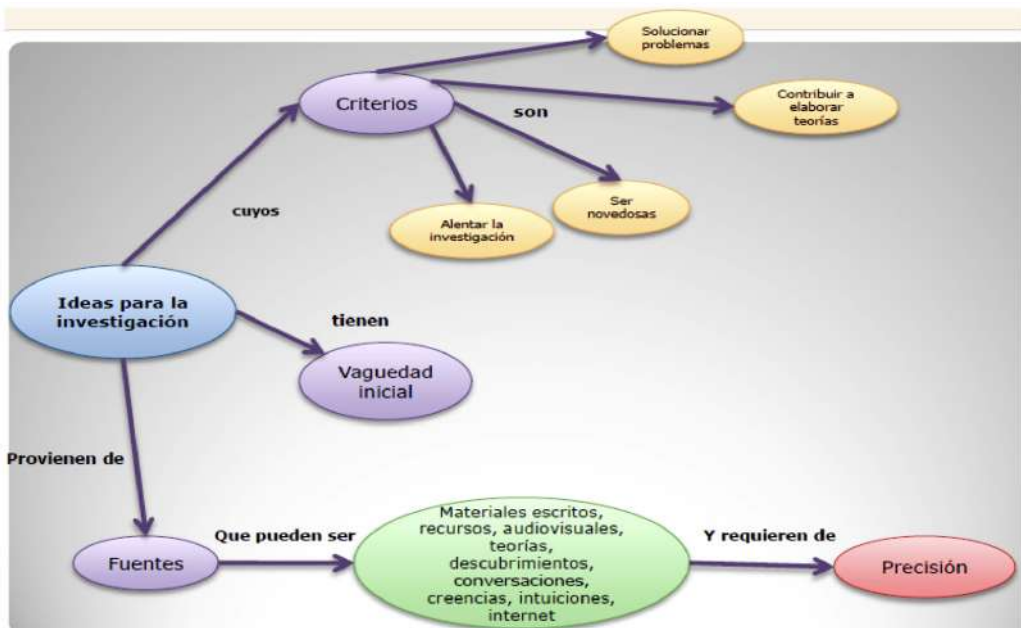
Ciencia	Enfoque	Infor- mación	Nivel	Alcance	Validez	Investigaciones		Valor
						Objetivo	Propósito	
			Segundo	Descriptivo (Estadística Descriptiva)	Interna	Análisis Univariado	Busca especificar las pro- piedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, pro- cesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se so- meta a un análisis, conside- ra al fenómeno estudiado, así como sus componentes, mide conceptos y define variables.	Es útil para mostrar con precisión los ángulos o dimensiones de un fenóme- no, suceso, comunidad, contexto o situación.
				Exploratorio			Se realiza cuando el obje- tivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, indagando desde una perspectiva innovadora, ayudan a iden- tificar conceptos promi- sorios y prepara el terreno para nuevos estudios.	Ayuda a familiarizarse con fenómenos desconocidos, obtener información para realizar una investigación más completa de un con- texto particular, investigar nuevos problemas, identi- ficar conceptos o variables promisorias, establecer prioridades para investi- gaciones futuras, o sugerir afirmaciones y postulados.

Criterios para generar ideas productivas de investigación:

- Las buenas ideas intrigan, alientan y excitan al investigador de manera personal. Al elegir un tema para investigar, más concretamente una idea, es importante que sea atractiva. Resulta muy tedioso tener que trabajar en algo que no sea de nuestro interés. En la medida en que la idea estimule y motive al investigador o investigadora, éste(a) se compenetrará más con el estudio y tendrá una mayor predisposición para salvar los obstáculos que se le presenten.
- Las buenas ideas de investigación “no son necesariamente nuevas, pero sí novedosas”. En muchas ocasiones es necesario actualizar estudios previos o adaptar los planteamientos derivados de investigaciones efectuadas en contextos diferentes, o en ocasiones, conducir ciertos planteamientos a través de nuevos caminos.
- Las buenas ideas de investigación pueden servir para elaborar teorías y solucionar problemas. Una buena idea puede conducir a una investigación que ayude a formular, integrar o probar una teoría o a iniciar otros estudios que, aunados a la investigación, logren constituir una teoría. O bien, generar nuevos métodos de recolectar y analizar datos. En otros casos, las ideas dan origen a investigaciones que ayudan a resolver problemas. Así, un estudio que se diseñe para analizar los factores que provocan conductas delictivas en los adolescentes contribuiría al establecimiento de programas dirigidos a resolver diversos problemas de delincuencia juvenil.
- Las buenas ideas pueden servir para generar nuevos interrogantes y cuestionamientos. Hay que responder a algunos de éstos, pero también es preciso crear otros. A veces un estudio llega a generar más preguntas que respuestas.

En la figura 5 se observan las ideas para la investigación:

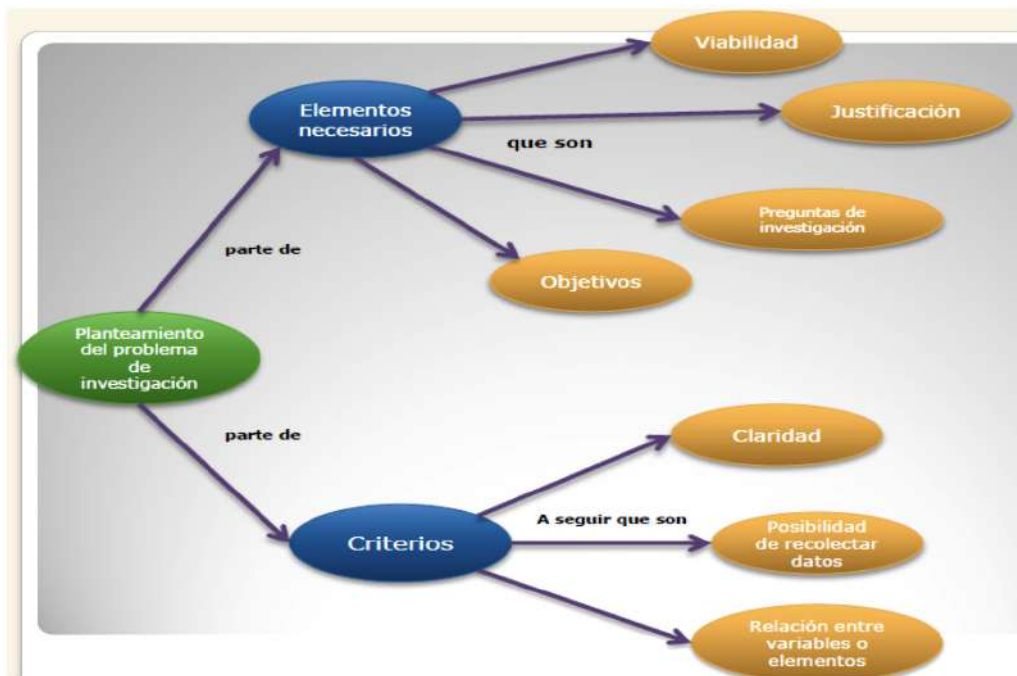
Figura 5 Ideas para la Investigación



Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

El planteamiento del problema de investigación se muestra en la figura 6.

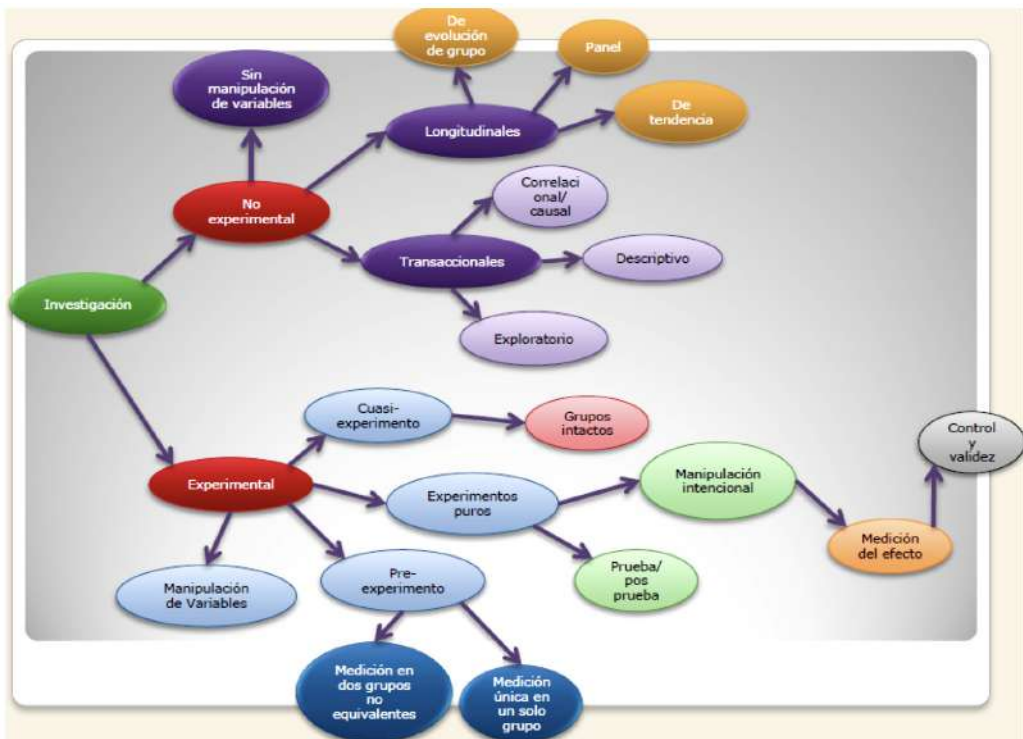
Figura 6 Planteamiento del problema de investigación



Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

En la figura 7 se muestran los tipos de investigación:

Figura 7 Tipos de Investigación



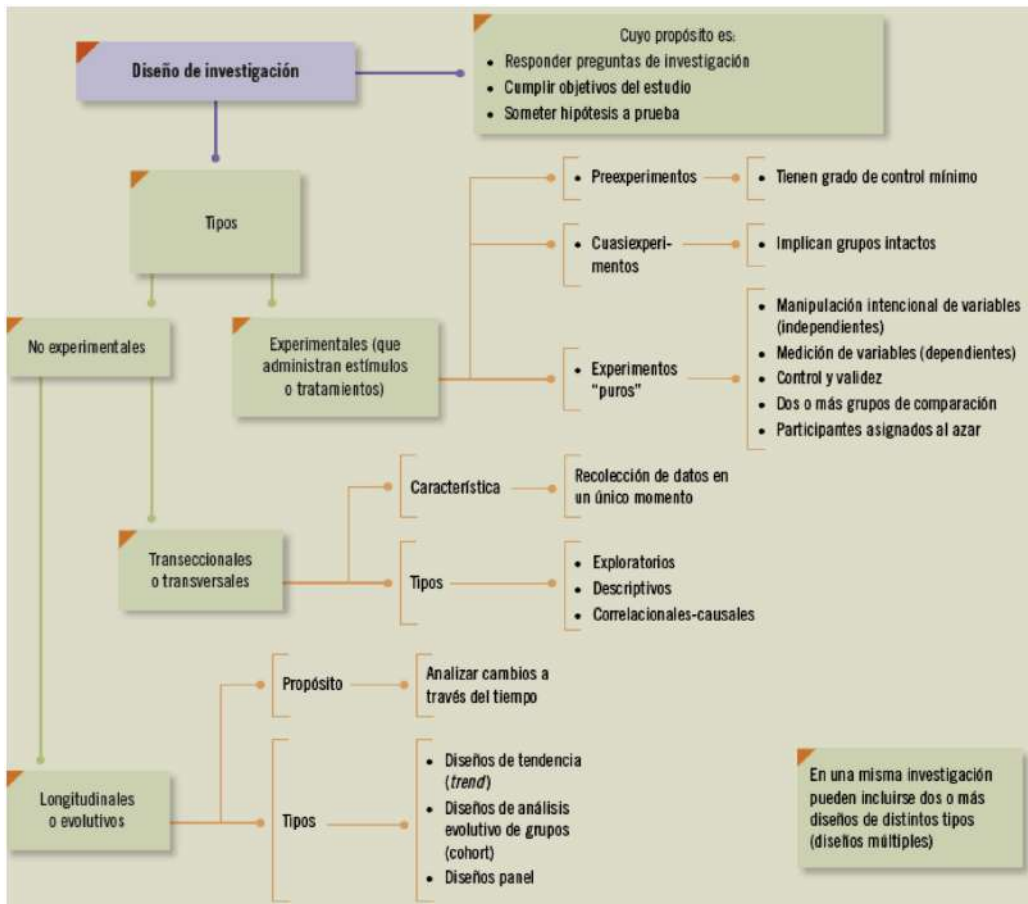
Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

### 2.3. ¿QUÉ ES UN DISEÑO DE INVESTIGACIÓN?

Una vez que se precisó el planteamiento del problema, se definió el alcance inicial de la investigación y se formularon las hipótesis (o no se establecieron debido a la naturaleza del estudio), el investigador debe visualizar la manera práctica y concreta de responder a las preguntas de investigación, además descubrir los objetivos fijados. Esto implica seleccionar o desarrollar uno o más diseños de investigación y aplicarlos al contexto particular de su estudio. El término diseño se refiere al plan o estrategia concebida para obtener la información que se desea en una investigación. En el enfoque cuantitativo, el investigador utiliza su o sus diseños para analizar la certeza de las hipótesis formuladas en un contexto en particular o para aportar evidencia respecto de los lineamientos de la investigación (si es que no se tienen hipótesis).

La figura 8 indica la clasificación del diseño de investigación:

Figura 8 Diseño de investigación



Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

## 2.4. ¿QUÉ SON LOS DISEÑOS EXPERIMENTALES?

Creswell (2005) denomina a los experimentos como estudios de intervención, porque un investigador genera una situación para tratar de explicar cómo afecta a quienes participan en ella en comparación con quienes no lo hacen. Los experimentos manipulan tratamientos, estímulos, influencias o intervenciones (variables independientes) para observar sus efectos sobre otras variables (dependientes) en una situación de control.

La figura 9 muestra el proceso de los experimentos como estudios de intervención.

Figura 9 Experimentos como estudios de intervención



Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

Es posible experimentar con seres humanos, seres vivos y ciertos objetos. El término experimento tiene al menos dos acepciones:

1. General. Se refiere a “elegir o realizar una acción” y después observar las consecuencias (Babbie, 2001). La esencia de esta concepción de experimento es que requiere la manipulación intencional de una acción para analizar sus posibles resultados. Este uso del término es bastante coloquial; así, hablamos de “experimentar” cuando mezclamos sustancias químicas y vemos la reacción provocada, o cuando nos cambiamos de peinado y observamos el efecto que suscita en nuestras amistades dicha transformación.
2. Particular. Una acepción particular de experimento, más armónica con un sentido científico del término, se refiere a un estudio en el que se manipulan intencionalmente una o más variables independientes (supuestas causas-antecedentes), para analizar las consecuencias que la manipulación tiene sobre una o más variables dependientes (supuestos efectos-consecuentes), dentro de una situación de control para el investigador.

La variable dependiente no se manipula, sino que se mide para ver el efecto que la manipulación de la variable independiente tiene en ella. La letra “X” suele



utilizarse para simbolizar una variable independiente o tratamiento experimental, las letras o subíndices “A, B...” indican distintos niveles de variación de la independiente y la letra “Y” se utiliza para representar una variable dependiente:

Manipulación de la variable independiente	Medición del efecto sobre la variable dependiente
$X_A$	$Y$
$X_B$	
•	
•	
•	

Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

La manipulación o variación de una variable independiente puede realizarse en dos o más grados:

- Presencia-ausencia. Este nivel o grado implica que un grupo se expone a la presencia de la variable independiente y el otro no. Posteriormente, los dos grupos se comparan para saber si el grupo expuesto a la variable independiente difiere del grupo que no fue expuesto. Por ejemplo: un grupo de personas con artritis se le administra un tratamiento médico (grupo experimental recibe el estímulo experimental) y al otro no (grupo de control o testigo).
- Más de dos grados. En otras ocasiones, es posible hacer variar o manipular la variable independiente en cantidades o grados. Manipular la variable independiente en varios niveles tiene la ventaja de que no sólo se puede determinar si la presencia de la variable independiente o tratamiento experimental tiene un efecto, sino también si distintos niveles de la variable independiente producen diferentes efectos. Es decir, si la magnitud del efecto ( $Y$ ) depende de la intensidad del estímulo ( $X_1, X_2, X_3$ , etcétera).

Simbología en Diseños Experimentales:

$R$ : Asignación al azar o aleatoria. Cuando aparece quiere decir que los sujetos han sido asignados a un grupo de manera aleatoria (proviene del inglés randomization).

$G$ : Grupo de sujetos ( $G_1$ , grupo 1;  $G_2$ , grupo 2; etcétera).

*X*: Tratamiento, estímulo o condición experimental (presencia de algún nivel o modalidad de la variable independiente).

*O*: Una medición de los sujetos de un grupo (prueba, cuestionario, observación, etc.).

Si aparece antes del estímulo o tratamiento, se trata de una preprueba (previa al tratamiento). Si aparece después del estímulo se trata de una posprueba (posterior al tratamiento). Ausencia de estímulo (nivel “cero” en la variable independiente). Indica que se trata de un grupo de control o testigo.

- **Pre experimentos.** Son llamados pre experimentos porque su grado de control es mínimo. Los diseños pre experimentales no son adecuados para el establecimiento de relaciones causales porque se muestran vulnerables en cuanto a la posibilidad de control y validez interna. Algunos autores consideran que deben usarse sólo como ensayos de otros experimentos con mayor control. En ciertas ocasiones los diseños pre experimentales sirven como estudios exploratorios o son útiles como un primer acercamiento al problema de investigación en la realidad, pero sus resultados deben observarse con precaución:
  - Estudio de caso con una sola medición: Este diseño no cumple con los requisitos de un experimento “puro”. No hay manipulación de la variable independiente (niveles) o grupos de contraste (ni siquiera el mínimo de presencia-ausencia). Tampoco hay una referencia previa de cuál era el nivel que tenía el grupo en la(s) variable(s) dependiente(s) antes del estímulo. No es posible establecer causalidad con certeza ni se controlan las fuentes de invalidación interna. Consiste en administrar un estímulo o tratamiento a un grupo y después aplicar una medición de una o más variables para observar cuál es el nivel del grupo en éstas.

Puede representarse como:

*G*                      *X*                      *O*

- Diseño de preprueba/posprueba con un solo grupo: Este diseño ofrece una ventaja sobre el anterior: existe un punto de referencia inicial para ver qué nivel tenía el grupo en la(s) variable(s) dependiente(s) antes del estímulo. Es decir, hay un seguimiento del grupo. Sin embargo, el diseño no resulta conveniente para fines de establecer causalidad: no hay manipulación ni

grupo de comparación y es posible que actúen varias fuentes de invalidación interna; por ejemplo: la historia. A un grupo se le aplica una prueba previa al estímulo o tratamiento experimental, después se le administra el tratamiento y, finalmente, se le aplica una prueba posterior al estímulo.

Puede representarse como:

$G$	$O_1$	$X$	$O_2$
-----	-------	-----	-------

- Experimentos “Puros”. Son aquellos que reúnen los dos requisitos para lograr el control y la validez interna (grupos de comparación -manipulación de la variable independiente- y equivalencia de los grupos). Estos diseños llegan a incluir una o más variables independientes y una o más dependientes. Asimismo, pueden utilizar prepruebas y pospruebas para analizar la evolución de los grupos antes y después del tratamiento experimental, aunque la posprueba sí es necesaria para determinar los efectos de las condiciones experimentales (Wiersma y Jurs, 2008):

- **Diseño con posprueba únicamente y grupo de control**

Este diseño incluye dos grupos: uno recibe el tratamiento experimental y el otro no (grupo de control). Es decir, la manipulación de la variable independiente alcanza sólo dos niveles: presencia y ausencia. Los sujetos se asignan a los grupos de manera aleatoria. Cuando concluye la manipulación, a ambos grupos se les administra una medición sobre la variable dependiente en estudio.

En este diseño, la única diferencia entre los grupos debe ser la presencia-ausencia de la variable independiente. Se representa como:

$RG_1$	$X$	$O_1$
$RG_2$	–	$O_2$

La comparación entre las pospruebas de ambos grupos ( $O_1$  y  $O_2$ ) nos indica si hubo o no efecto de la manipulación. Si ambas difieren significativamente ( $O_1 \neq O_2$ ), esto nos indica que el tratamiento experimental tuvo un efecto a considerar. Por tanto, se acepta la hipótesis de diferencia de grupos. Si no hay diferencias ( $O_1 = O_2$ ), ello indica que no hubo un efecto significativo del tratamiento experimental ( $X$ ). En este caso se acepta la hipótesis nula.

Se suele representar como:

$RG_1$	$X_1$	$0_1$
$RG_2$	$X_2$	$0_2$
$RG_3$	$X_3$	$0_3$
•		
•		
•		
$RG_k$	$X_k$	$0_k$
$RG_{k+1}$	–	$0_{k+1}$

Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

Observe que el último grupo no se expone a la variable independiente: es el grupo de control o testigo. Si se carece de grupo de control, el diseño puede llamarse “diseño con grupos de asignación aleatoria y posprueba únicamente” (Wiersma y Jurs, 2008).

- **Diseño con preprueba, posprueba y grupo de control**

Este diseño incorpora la administración de prepruebas a los grupos que componen el experimento. Los participantes se asignan al azar a los grupos, después a éstos se les aplica simultáneamente la preprueba; un grupo recibe el tratamiento experimental y otro no (es el grupo de control); por último, se les administra, también simultáneamente, una posprueba. El diseño se diagrama como sigue:

$RG_1$	$0_1$	$X$	$0_1$
$RG_2$	$0_3$	–	$0_4$

La adición de la prueba previa ofrece dos ventajas: primera, sus puntuaciones sirven para fines de control en el experimento, pues al compararse las prepruebas de los grupos se evalúa qué tan adecuada fue la asignación aleatoria, lo cual es conveniente con grupos pequeños.

En grupos grandes la técnica de distribución aleatoria funciona, pero cuando tenemos grupos de 15 personas no está de más evaluar qué tanto funcionó la asignación al azar. La segunda ventaja reside en que es posible analizar el puntaje-ganancia de cada grupo (diferencia entre las puntuaciones de la preprueba y la posprueba).

Se representa de la manera siguiente:

$RG_1$	$O_1$	$X_1$	$O_2$
$RG_2$	$O_3$	$X_2$	$O_4$
$RG_3$	$O_5$	$X_3$	$O_6$
•			
•			
•			
$RG_k$	$O_{2k-1}$	$X_k$	$O_{2k}$
$RG_{k+1}$	$O_{1k+1}$	–	$O_{2(k+1)}$

Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

Se tienen diversos tratamientos experimentales y un grupo de control. Si éste es excluido, el diseño se llamaría “diseño de preprueba-posprueba con grupos distribuidos aleatoriamente” (Solomon, 1949).

• **Diseño de cuatro grupos de Salomón**

Solomon (1949) describió un diseño que era la mezcla de los dos anteriores (diseño con posprueba únicamente y grupo de control más diseño de preprueba-posprueba con grupo de control). La suma de estos dos diseños origina cuatro grupos: dos experimentales y dos de control, los primeros reciben el mismo tratamiento experimental y los segundos no reciben tratamiento. Sólo a uno de los grupos experimentales y a uno de los grupos de control se les administra la preprueba; a los cuatro grupos se les aplica la posprueba.

Los participantes se asignan en forma aleatoria. Se representa como:

$RG_1$	$O_1$	$X$	$O_2$
$RG_2$	$O_3$	–	$O_4$
$RG_3$	–	$X$	$O_5$
$RG_4$	–	–	$O_6$

Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

El diseño original incluye sólo cuatro grupos y un tratamiento experimental. Los efectos se determinan comparando las cuatro pospruebas.

Los grupos uno y tres son experimentales, grupos dos y cuatro son de control. La ventaja de este diseño es que el experimentador o la experimentadora tienen la posibilidad de verificar los posibles efectos de la preprueba sobre la posprueba, puesto que a unos grupos se les administra un test previo y a otros no.

Es posible que la preprueba afecte la posprueba o que aquélla interactúe con el tratamiento experimental.

- **Diseños experimentales de series cronológicas múltiples**

Los tres diseños experimentales que se han comentado sirven más bien para analizar efectos inmediatos o a corto plazo. En ocasiones el experimentador está interesado en analizar efectos a mediano o largo plazo, porque tiene bases para suponer que la influencia de la variable independiente sobre la dependiente tarda en manifestarse o que el diseño se efectúa a través del tiempo mediante varias observaciones o mediciones sobre una o más variables, sea o no experimental.

Por ejemplo, programas de difusión de innovaciones, métodos educativos, modelos de entrenamiento o estrategias de las psicoterapias. Asimismo, en otras situaciones se busca evaluar la evolución del efecto en el corto, mediano y largo plazos (no solamente el resultado).

También, en ocasiones la aplicación del estímulo por una sola vez no tiene efectos (una dosis de un medicamento, un único programa televisivo, unos cuantos anuncios en la radio, etc.). En tales casos es conveniente adoptar diseños con varias pospruebas, o bien con diversas prepruebas y pospruebas, con repetición del estímulo, con varios tratamientos aplicados a un mismo grupo y otras condiciones. A estos diseños se les conoce como series cronológicas experimentales.

- **Diseños factoriales**

En ocasiones, el investigador o la investigadora pretenden analizar experimentalmente el efecto que sobre la(s) variable(s) dependiente(s) tiene la manipulación de más de una variable independiente. Los diseños factoriales manipulan dos o más variables independientes e incluyen dos o más niveles o modalidades de presencia en cada una de las variables independientes.

La construcción básica de un diseño factorial consiste en que todos los niveles o modalidades de cada variable independiente son tomados en combinación con todos los niveles o modalidades de las otras variables independientes (Wiersma y Jurs, 2008). Por ejemplo, determinar el efecto de tres medicamentos distintos (primera variable independiente, clase de medicamento) y la dosis diaria (segunda variable independiente, con dos niveles, supongamos 40 y 20 mg) sobre la cura de una enfermedad (variable dependiente).

Aquí tenemos dos independientes, pero podríamos tener tres o más: conocer cómo afectan en el nivel de aceleración de un vehículo (dependiente), el peso del chasis (dos diferentes pesos), el material con que está fabricado (supongamos tres tipos de materiales), el tamaño del rin de las ruedas (14, 15 y 16 pulgadas) y el diseño de la carrocería (por ejemplo, dos diseños distintos). Cuatro variables independientes. Estos diseños se conocen como factoriales.

### 2.5. ¿QUÉ SON LAS HIPÓTESIS?

Son las guías para una investigación o estudio. Las hipótesis indican lo que tratamos de probar y se definen como explicaciones tentativas del fenómeno investigado. Las hipótesis son el centro, la médula o el eje del método deductivo cuantitativo y se puede tener una, dos o varias hipótesis. Se derivan de la teoría existente (Williams, 2005) y deben formularse a manera de proposiciones. De hecho, son respuestas provisionales a las preguntas de investigación.

**Por ejemplo:** si una pregunta de investigación es “¿le gustará a Paola?” y una hipótesis derivada sería “Le resulta atractivo a Paola”. Esta hipótesis es una explicación tentativa y está formulada como proposición. Después investigamos si se acepta o se rechaza la hipótesis, al cortejar a Paola y observar el resultado obtenido.

Es importante mencionar que no todas las investigaciones cuantitativas plantean hipótesis. El hecho de que formulemos o no hipótesis depende de un factor esencial: el alcance inicial del estudio. Las hipótesis no necesariamente son verdaderas, pueden o no serlo, pueden o no comprobarse con datos y pueden ser más o menos generales o precisas e involucrar a dos o más variables, pero en cualquier caso son sólo proposiciones sujetas a comprobación empírica y a verificación en la realidad. Son explicaciones tentativas, no los hechos en sí.

Al formularlas, el investigador no está totalmente seguro de que vayan a comprobarse. Las investigaciones cuantitativas que formulan hipótesis son aquellas cuyo planteamiento define que su alcance será correlacional o explicativo, o las que tienen un alcance descriptivo, pero que intentan pronosticar una cifra o un hecho. La formulación de hipótesis en estudios cuantitativos con diferentes alcances se la observa en la tabla 5:

Tabla 5 Alcance en estudios cuantitativos

Alcance de estudio	Formulación de hipótesis
Exploratorio	No se formulan hipótesis.
Descriptivo	Sólo se formulan hipótesis cuando se pronostica un hecho o dato.
Correlacional	Se formulan hipótesis correlacionales.
Explicativo	Se formulan hipótesis causales.

Ejemplos:

- “La proximidad geográfica entre los hogares de las parejas de novios está vinculada positivamente con el nivel de satisfacción que les proporciona su relación”.
- “El índice de cáncer pulmonar es mayor entre los fumadores que entre los no fumadores”.
- “A mayor variedad en el trabajo, habrá mayor motivación intrínseca hacia éste”.

Bajo el enfoque cuantitativo, es natural que las hipótesis surjan del planteamiento del problema que, se vuelve a evaluar y si es necesario se replantea después de revisar la literatura. Las hipótesis pueden surgir de un postulado de una teoría, del análisis de ésta, de generalizaciones empíricas pertinentes al problema de investigación, estudios revisados o antecedentes consultados o por analogía -relación de semejanza entre cosas distintas-, al aplicar cierta información a otros contextos, como la teoría del campo en psicología, que surgió de la teoría del comportamiento de los campos magnéticos. Sin embargo, hipótesis útiles y fructíferas pueden originarse en planteamientos del problema cuidadosamente revisados, aunque el cuerpo teórico que las sustente no sea abundante.

A veces la experiencia y la observación constante ofrecen material potencial para el establecimiento de hipótesis importantes y lo mismo se dice de la intuición. No obstante, existe una relación muy estrecha entre el planteamiento del problema,



la revisión de la literatura y las hipótesis. Mediante el proceso quizá se obtengan otras hipótesis que no estaban contempladas en el planteamiento original, producto de nuevas reflexiones, ideas o experiencias; discusiones con profesores, colegas o expertos en el área; incluso, “de analogías, al descubrir semejanzas entre la información referida a otros contextos y la poseída para el estudio” (Rojas, 2000).

Lo que sí constituye una grave falla en la investigación es formular hipótesis sin haber revisado con cuidado la literatura, pues se cometen errores como sugerir hipótesis de algo bastante comprobado o algo que ha sido contundentemente rechazado. En conclusión, la calidad de las hipótesis está relacionada en forma positiva con el grado en que se haya revisado la literatura exhaustivamente.

### 2.5.1. Características de una hipótesis

Dentro del enfoque cuantitativo, para que una hipótesis sea digna de tomarse en cuenta, debe reunir algunos requisitos:

- La hipótesis debe referirse a una situación “real”. Como argumenta Rojas (2001), las hipótesis sólo pueden someterse a prueba en un universo y un contexto bien definidos. Por ejemplo, “a mayor satisfacción laboral mayor productividad”.
- Las variables o términos de la hipótesis deben ser comprensibles, precisos y lo más concretos posible. Términos vagos o confusos no tienen cabida en una hipótesis. Así, globalización de la economía y sinergia organizacional son conceptos imprecisos y generales que deben sustituirse por otros más específicos y concretos.
- La relación entre variables propuesta por una hipótesis debe ser clara y verosímil (lógica). Por ejemplo: “la disminución del consumo del petróleo en Estados Unidos se relaciona con el grado de aprendizaje del álgebra por parte de niños que asisten a escuelas públicas en Ecuador”.
- Los términos o variables de la hipótesis deben ser observables y medibles, así como la relación planteada entre ellos, o sea, tener referentes en la realidad. Por ejemplo: “los hombres más felices van al cielo” o “la libertad de espíritu está relacionada con la voluntad angelical”, implican conceptos o relaciones que no poseen referentes empíricos; por tanto, no son útiles como hipótesis para investigar científicamente ni se pueden someter a prueba en la realidad.

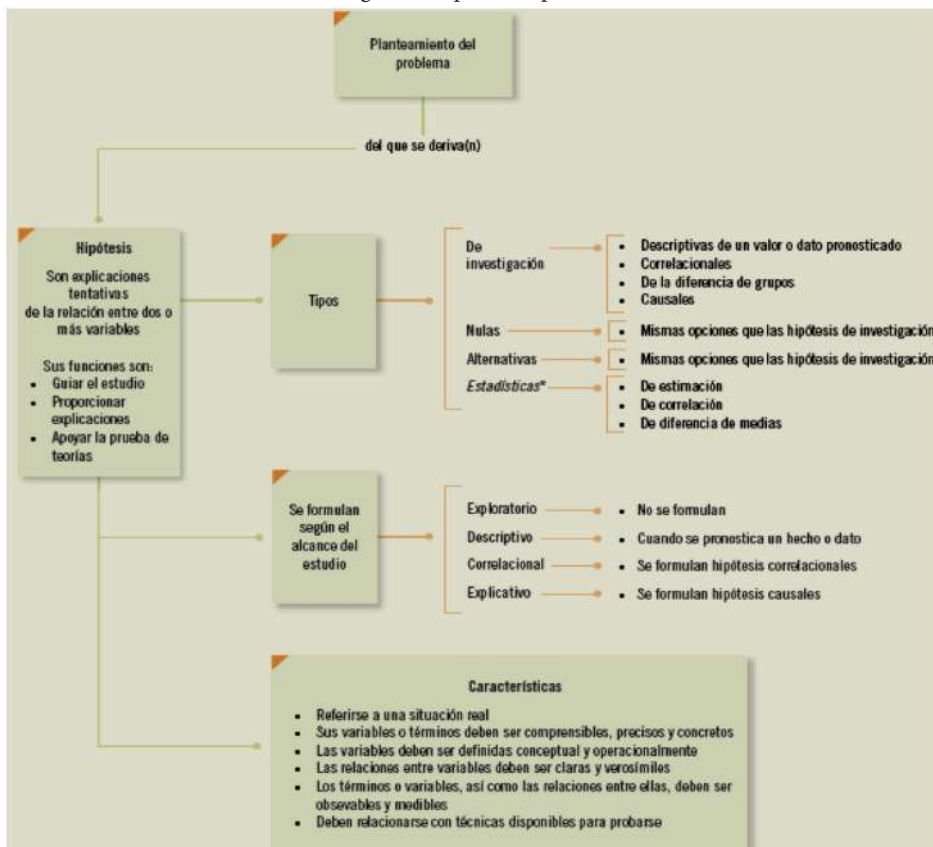
Las hipótesis deben estar relacionadas con técnicas disponibles para probarlas. Este requisito está estrechamente ligado con el anterior y se refiere a que al formular una hipótesis, tenemos que analizar si existen técnicas o herramientas de investigación para verificarla.

Por ejemplo: Alguien quiere probar hipótesis referentes a la desviación presupuestal en el gasto gubernamental de un país latinoamericano o a la red de narcotraficantes en México, pero no dispone de formas eficaces para obtener sus datos.

### 2.5.2. Tipos de hipótesis

La figura 10 indica los tipos de hipótesis según las características del planteamiento del problema.

Figura 10 Tipos de Hipótesis



Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

1. De investigación o de trabajo. Son proposiciones tentativas sobre la(s) posibles relaciones entre dos o más variables y deben cumplir con los cinco requisitos mencionados. Se suelen simbolizar como  $H_i$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ , etcétera. Pueden ser:
  - a) Descriptivas de un valor o dato pronosticado. Se utilizan a veces en estudios descriptivos, para intentar predecir un dato o valor en una o más variables que se van a medir u observar. Pero cabe comentar que no en todas las investigaciones descriptivas se formulan hipótesis de esta clase o que sean afirmaciones más generales.

Ejemplo:

$H_i$ : “El aumento del número de divorcios de parejas cuyas edades oscilan entre los 18 y 25 años, será de 20 % el próximo año”.

$H_i$ : “La inflación del próximo semestre no será superior a 3 %”.

- b) Correlacionales. Especifican las relaciones entre dos o más variables y corresponden a los estudios correlacionales. No sólo pueden establecer que dos o más variables se encuentran vinculadas, sino también cómo están asociadas. Alcanzan el nivel predictivo y parcialmente explicativo. En una hipótesis de correlación, el orden en que coloquemos las variables no es importante (ninguna variable antecede a la otra; no hay relación de causalidad).

Es lo mismo indicar “a mayor  $X$ , mayor  $Y$ ”; que “a mayor  $Y$ , mayor  $X$ ”; o “a mayor  $X$ , menor  $Y$ ”; que “a menor  $Y$ , mayor  $X$ ”). Es común que cuando en la investigación se pretende correlacionar diversas variables se tengan varias hipótesis y cada una de ellas relacione un par de variables. Estas hipótesis deben contextualizarse en su realidad (con qué parejas) y someterse a prueba empírica.

Ejemplos:

$H_i$ : “A mayor exposición por parte de los adolescentes a videos musicales con alto contenido sexual, mayor manifestación de estrategias en las relaciones interpersonales para establecer contacto sexual”.

$H_i$ : “A mayor autoestima, habrá menor temor al éxito”.

$H_i$ : “Las telenovelas latinoamericanas muestran cada vez un mayor contenido sexual en sus escenas”.

$H_1$ : “A mayor atracción física, menor confianza”.

$H_2$ : “A mayor atracción física, mayor proximidad física”.

$H_3$ : “A mayor atracción física, mayor equidad”.

$H_4$ : “A mayor confianza, mayor proximidad física”.

$H_5$ : “A mayor confianza, mayor equidad”.

$H_6$ : “A mayor proximidad, mayor equidad”.

- c) Diferencia de grupos. Estas hipótesis se formulan en investigaciones cuya finalidad es comparar grupos.

Por ejemplo:

$H_i$ : “El efecto persuasivo para dejar de fumar no será igual en los adolescentes que vean la versión del comercial televisivo en colores, que el efecto en los adolescentes que vean la versión del comercial en blanco y negro”.

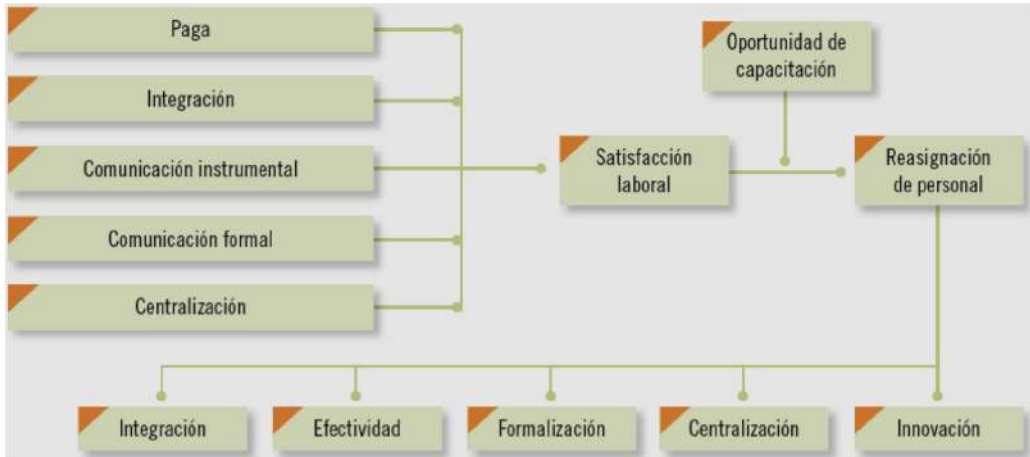
$H_i$ : “Los adolescentes le atribuyen más importancia al atractivo físico en sus relaciones de pareja, que las adolescentes a las suyas”.

$H_i$ : “El tiempo que tardan en desarrollar el SIDA las personas contagiadas por transfusión sanguínea, es menor que las que adquieren el VIH por transmisión sexual”.

$H_i$ : “Las escenas de la telenovela La verdad de Paola presentarán un mayor contenido sexual que las de la telenovela Sentimientos de Christian, y éstas, a su vez, un mayor contenido sexual que las escenas de la telenovela Mi último amor: Mariana”

- d) Causales. Este tipo de hipótesis no solamente afirma la o las relaciones entre dos o más variables y la manera en que se manifiestan, sino que además propone un “sentido de entendimiento” de las relaciones. Tal sentido puede ser más o menos completo, esto depende del número de variables que se incluyan, pero todas estas hipótesis establecen relaciones de causa-efecto.





Fuente: Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. M. (2010)

Ejemplos:

$H_1$ : “La desintegración del matrimonio provoca baja autoestima en los hijos e hijas”.

$H_2$ : “Un clima organizacional negativo crea bajos niveles de innovación en los empleados”.

$H_3$ : “Un clima organizacional negativo crea bajos niveles de innovación en los empleados”.

$H_4$ : “La cohesión y la centralidad en un grupo sometido a una dinámica, así como el tipo de liderazgo que se ejerza dentro del grupo, determinan la eficacia de éste para alcanzar sus metas primarias”.

$H_5$ : “La variedad y la autonomía en el trabajo, así como la retroalimentación proveniente del desarrollo de éste, generan mayor motivación intrínseca y satisfacción laborales”.

$H_6$ : “La paga aumenta la motivación intrínseca de los trabajadores, cuando se administra de acuerdo con el desempeño”.

$H_7$ : “La paga incrementa la satisfacción laboral”.

$H_8$ : “La integración, la comunicación instrumental y la comunicación formal incrementan la satisfacción laboral”.

$H_9$ : “La centralización disminuye la satisfacción laboral”.

$H_{10}$ : “La satisfacción laboral influye en la reasignación de personal”.

$H_5$ : “La oportunidad de capacitación mediatiza la vinculación entre la satisfacción laboral y la reasignación de personal”.

$H_6$ : “La reasignación de personal afecta la integración, la efectividad organizacional, la formalización, la centralización y la innovación”.

2. Nulas. Las hipótesis nulas son, en cierto modo, el reverso de las hipótesis de investigación. Son proposiciones que niegan o refutan la relación entre variables, sólo que sirven para refutar o negar lo que afirma la hipótesis de investigación. Debido a que este tipo de hipótesis resulta la contrapartida de la hipótesis de investigación, hay prácticamente tantas clases de hipótesis nulas como de investigación. Las hipótesis nulas se simbolizan así:  $H_0$ .

Ejemplos:

$H_0$ : “El aumento del número de divorcios de parejas cuyas edades oscilan entre los 18 y 25 años, no será de 20% el próximo año”.

$H_0$ : “No hay relación entre la autoestima y el temor al éxito”.

$H_0$ : “Las escenas de la telenovela La verdad de Paola no presentarán mayor contenido sexual que las de la telenovela Sentimientos de Christian, ni éstas tendrán mayor contenido sexual que las escenas de la telenovela Mi último amor: Mariana”. Esta hipótesis niega la diferencia entre grupos y también podría formularse así: “no existen diferencias en el contenido sexual entre las escenas de las telenovelas La verdad de Paola, Sentimientos de Christian y Mi último amor Mariana”. O bien, “el contenido sexual de las telenovelas La verdad de Paola, Sentimientos de Christian y Mi último amor Mariana es el mismo”.

$H_0$ : “La percepción de la similitud en religión, valores y creencias no provoca mayor atracción” (hipótesis que niega la relación causal).

3. Alternativas. Son posibilidades diferentes o “alternas” ante las hipótesis de investigación y nula: ofrecen otra descripción o explicación distinta de las que proporcionan estos tipos de hipótesis.

Las hipótesis alternativas se simbolizan como  $H_a$  y sólo pueden formularse cuando efectivamente hay otras posibilidades, además de las hipótesis de investigación y nula.

Ejemplos:

$H_i$ : “El candidato A obtendrá en la elección para la presidencia del consejo escolar entre 50 y 60 % de la votación total”.

$H_o$ : “El candidato A no obtendrá en la elección para la presidencia del consejo escolar entre 50 y 60 % de la votación total”.

$H_a$ : “El candidato A obtendrá en la elección para la presidencia del consejo escolar más de 60 % de la votación total”.

$H_a$ : “El candidato A obtendrá en la elección para la presidencia del consejo escolar menos del 50 % de la votación total”.

No existen reglas específicas para formular hipótesis, a menudo se sugiere la forma de hipótesis nula y alternativa; es decir, no hay reglas universales, ni siquiera consenso entre los investigadores. En consecuencia, las expectativas teóricas o trabajo empírico previo o ambos pueden ser la base para formular hipótesis; aunque, sin importar la forma de postular hipótesis es extremadamente importante que el investigador las plantee antes de la investigación empírica, sino el (los) o la investigadora (s) serán culpables de razonamientos circulares o profecías autocumplidas; es decir, si se formula la hipótesis después de examinar resultados empíricos puede presentarse la tentación de formular hipótesis de manera que justifique resultados.

Se puede leer en un artículo de alguna revista científica un reporte de investigación donde sólo se establezca la hipótesis de investigación; y, en otra, encontrar un artículo donde únicamente se plantea la hipótesis nula. Un artículo en una tercera revista, en el cual se puedan encontrar solamente las hipótesis de investigación y nula, pero no las alternativas.

En una cuarta publicación otro artículo que contenga la hipótesis de investigación y las alternativas. Y otro más donde aparezcan hipótesis de investigación, nulas y alternativas. Algunos investigadores sólo enuncian una hipótesis nula o de investigación presuponiendo que quien lea su reporte deducirá la hipótesis contraria. Sin embargo, la calidad de una investigación no necesariamente está relacionada con el número de hipótesis que contenga.

En este sentido, se debe tener el número de hipótesis necesarias para guiar el estudio, ni una más ni una menos. Cada investigación es diferente, pues



algunas contienen gran variedad de hipótesis porque el problema de investigación es complejo (por ejemplo, pretenden relacionar 15 o más variables), mientras que otras contienen una o dos hipótesis. Asimismo, en una investigación se pueden formular hipótesis descriptivas de un dato que se pronostica en una variable, hipótesis correlacionales, hipótesis de la diferencia de grupos, hipótesis causales e incluso hipótesis de cola derecha, cola izquierda o de ambas colas.

La tabla 6 muestra ejemplos de cuestionamientos de investigación:

Tabla 6 Cuestionamientos de investigación

Preguntas de investigación	Hipótesis
¿Cuál será a fin de año el nivel de desempleo en la Ciudad de Guaranda?	El nivel de desempleo en la Ciudad de Guaranda será de 7 % a fin de año ( $H_i: 7\%$ )
¿Cuál es el nivel promedio de ingreso familiar mensual en la Ciudad de Guaranda?	El nivel promedio de ingreso familiar mensual en la Ciudad de Guaranda oscila entre 650 y 700 USD ( $H_i: 649 < \bar{X} < 701$ ).
¿Existen diferencias entre los barrios de la Ciudad de Guaranda respecto a nivel de desempleo? (¿Hay barrios con mayores índices de desempleo?)	Existen diferencias respecto al nivel de desempleo entre barrios de la Ciudad de Guaranda ( $H_i: \text{Índice } 1 \neq \text{Índice } 2 \neq \text{Índice } 3 \neq \text{Índice } k$ ).
¿Cuál es el nivel de escolaridad promedio de los jóvenes y las jóvenes que viven en la Ciudad de Guaranda? ¿Existen diferencias por género al respecto?	No se dispone de información, no se establecen hipótesis.
¿Está relacionado el desempleo con incrementos en la delincuencia de dicha ciudad?	A mayor desempleo, mayor delincuencia  ( $H_i: r_{xy} \neq 0$ ).
¿Provoca el nivel de desempleo un rechazo contra la política fiscal gubernamental?	El desempleo provoca rechazo contra política fiscal gubernamental ( $H_i: X \rightarrow Y$ ).

Estadísticas. Las hipótesis estadísticas son la hipótesis nula y la hipótesis alterna. En el campo de la utilización y aprovechamiento de la estadística, las decisiones se toman siempre sobre determinadas hipótesis. La eficiencia de las campañas publicitarias o de los procesos de producción se fundan en criterios numéricos, y tales hipótesis se expresan en función de parámetros estadísticos. En el análisis de todo problema de investigación, la contrastación de una hipótesis dada se realiza aceptando o rechazando la hipótesis nula.

### 2.5.3. ¿Cuál es la utilidad de las hipótesis?

Las principales funciones de las hipótesis son:

1. En primer lugar, son las guías de una investigación en el enfoque cuantitativo. Formularlas nos ayuda a saber lo que tratamos de buscar, de probar. Proporcionan orden y lógica al estudio (Selltiz et al., 1980).
2. En segundo lugar, tienen una función descriptiva y explicativa, según sea el caso. Cada vez que una hipótesis recibe evidencia empírica en su favor o en su contra, nos dice algo acerca del fenómeno con el que se asocia o hace referencia.
3. En tercer lugar, es probar teorías. Cuando varias hipótesis de una teoría reciben evidencia positiva, la teoría va haciéndose más robusta; cuanta más evidencia haya en favor de aquéllas, más evidencia habrá en favor de ésta.

En cuarto lugar, consiste en sugerir teorías. Diversas hipótesis no están asociadas con teoría alguna; pero llega a suceder que, como resultado de la prueba de una hipótesis, se pueda construir una teoría o las bases para ésta.

### 2.5.4. ¿Qué es la prueba de hipótesis?

Las hipótesis del proceso cuantitativo se someten a prueba o escrutinio empírico para determinar si son apoyadas o refutadas, de acuerdo con lo que el investigador observa. Ahora bien, en realidad no se puede probar que una hipótesis sea verdadera o falsa, sino argumentar que fue apoyada o no de acuerdo con ciertos datos obtenidos en una investigación particular.

Desde el punto de vista técnico, no se acepta una hipótesis a través de un estudio, sino que se aporta evidencia en su favor o en su contra. En el enfoque cuantitativo, las hipótesis se someten a prueba en la “realidad” cuando se aplica un diseño de investigación, se recolectan datos con uno o varios instrumentos de medición y se analizan e interpretan.

Se debe tener claro que no aceptar “rechazar” o no rechazar “aceptar” una hipótesis nula depende de  $\alpha$ , nivel de significancia o probabilidad de cometer error

tipo I, probabilidad de rechazar la hipótesis cuando es verdadera.  $\alpha$  se fija en niveles de 1, 5 o cuando mucho, 10 %, pero según Gujarati y Porter (2010) no hay nada “sagrado” acerca de estos valores tal que cualquier otro valor sería por igual apropiado.

No obstante, comúnmente se fijan estos niveles de  $\alpha$  para control de calidad, diseños experimentales o investigaciones sociales, respectivamente y, de igual manera, los econométricos tienen por costumbre fijar el valor  $\alpha$  en estos niveles como máximo y escogen un estadístico de prueba que haga la probabilidad de cometer un error tipo II sea lo más pequeño posible. Como uno menos la probabilidad de cometer error tipo II se conoce como potencia de prueba, este procedimiento equivale a maximizar la potencia de prueba.

#### 2.5.4.1. Distribución “t-Student”

En problemas referentes a la prueba de hipótesis “cuando se conoce la desviación típica poblacional” no importa que el tamaño de la muestra sea grande o pequeña. Se dice que una muestra es grande, si el número de unidades es mayor a treinta ( $n \geq 30$ ) siendo la representación de su desviación típica como  $S$ , pero  $S = \sigma$  si la muestra es pequeña o menor o igual a treinta ( $n \leq 30$ ), siendo la representación de su desviación típica como  $\hat{S}$ , pero es  $\hat{S} < \sigma$ .

En caso que se desconozca la desviación típica poblacional se le podrá reemplazar por la desviación típica muestral, siempre que la muestra sea grande.  $S = \sigma$  se considera un buen estimador de la desviación típica poblacional, pues existe una mayor probabilidad que los valores extremos que toma la variable queden incluidos en el cálculo de la varianza en la muestra, como sucede al obtener la varianza poblacional (Martínez, 2012):

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

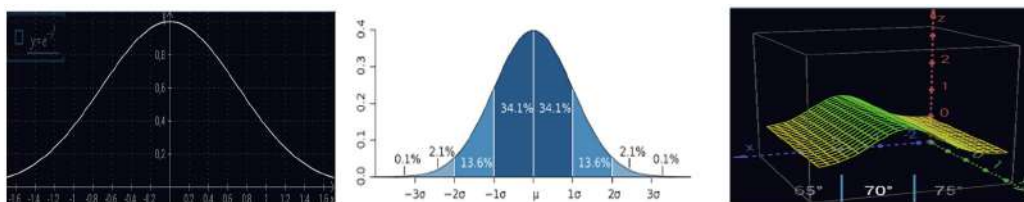
$\hat{S} < \sigma$  debido a la poca posibilidad de que se incluyan valores extremos de la variable poblacional en la muestra. Por lo tanto, se hace necesario efectuar algunas correcciones en su cálculo, con el fin de convertirla en un buen estimador de la desviación típica poblacional:

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i^2 - n\bar{x})^2}{n - 1}}$$

A pesar de las correcciones que se le puedan hacer a las desviaciones típicas, no es efectiva en todas las muestras; por tal razón, la distribución de todas las medias muestrales no tiene un comportamiento similar a la distribución normal, cuyo origen está en la “Curva de probabilidad”, “Curva de Gauss” o “Curva de campana” con función  $Y = e^{-x^2}$ , a pesar de ser una distribución continua.

A esta distribución se le conoce como distribución “*t-Student*” en honor al estadístico irlandés William Sealy Gosset (W. S. Gosset), quien escribía bajo el pseudónimo de “Student”.

Gráficamente se representa:



Fuente: Elaboración propia con uso de Matlab

Esta distribución se expresa en forma de campana y simétrica, pero más achata y con más área en los extremos; es decir, las áreas que corresponden a las regiones críticas o de rechazo. Se puede considerar que no hay una distribución “*t*”, sino una familia de distribuciones “*t*”, dado a que las desviaciones estándar se modifican a medida que se va aumentando el tamaño de la muestra, acercándose a la normal.

Esto se basa en, de acuerdo con Granville (2009), la “Determinación de la constante de integración por medio de Condiciones Iniciales”, pues la constante de integración puede hallarse cuando se conoce el valor de la integral para algún valor particular de la variable tal que, en realidad, para determinar la constante de integración es necesario tener algunos datos, además, de la expresión diferencial que se ha de integrar.

### Ejercicio 2.1.

Halle una función cuya primera derivada sea  $3X^2 - 2X + 5$  y tenga el valor 12 cuando  $X = 1$ , por lo que  $(3X^2 - 2X + 5) dx$  es la expresión diferencial por integrar. Ahora bien,  $\int(3X^2 - 2X + 5) dx = X^3 - X^2 + 5X + C$ , siendo  $C$  constante de integración, pero por condiciones del problema, el resultado será igual a 12 cuando  $X = 1$ ; es decir,  $12 = 1 - 1 + 5 + C \Rightarrow C = 7 \therefore X^3 - X^2 + 5X + 7$  es la función buscada.

Simultáneamente, el “Significado geométrico de la constante de integración” es importante en este caso.

### Ejercicio 2.2.

Si se determina la ecuación de curva cuya tangente en cada punto tenga de pendiente  $2X$  y dado que la pendiente de tangente a una curva en un punto cualquiera es  $\frac{\delta y}{\delta x}$  se tiene por hipótesis que  $\frac{\delta y}{\delta x} = 2X \Rightarrow dy = 2X dx$  por lo que integrando equivale a:

$$Y = 2 \int X dx \Rightarrow \therefore Y = X^2 + C,$$

Considere que  $C$  es la constante de integración

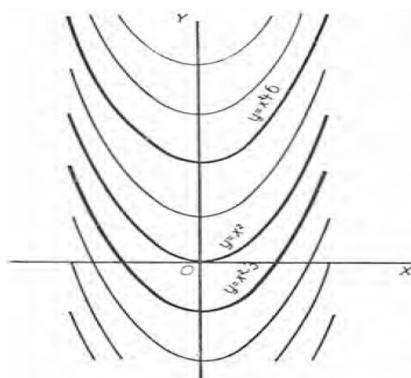
tal que si se da a  $C$  varios valores, como 6, 0, -3,

entonces  $Y = X^2 + C$  da las ecuaciones:

$Y = X^2 + 6$ ,  $Y = X^2 + 0$  y  $Y = X^2 - 3$ , cuyos lugares geométricos son parábolas con sus ejes en “eje  $y$ ” y que cortan a este eje a distancias 6, 0, -3 del origen, respectivamente.

Por lo tanto, todas las parábolas  $Y = X^2 + C$  tienen el mismo valor de  $\frac{\delta y}{\delta x}$ ; es decir, la misma dirección o pendiente para el mismo valor de  $X$ . También, la diferencia de sus ordenadas permanece la misma para todos los valores de  $X$ . Por lo tanto, todas las parábolas pueden obtenerse trasladando una cualquier de ellas a lo largo del “eje de las  $y$ ”, pues en este caso el valor de  $C$  no afecta la pendiente de la curva:

Figura 12 Familia de curvas



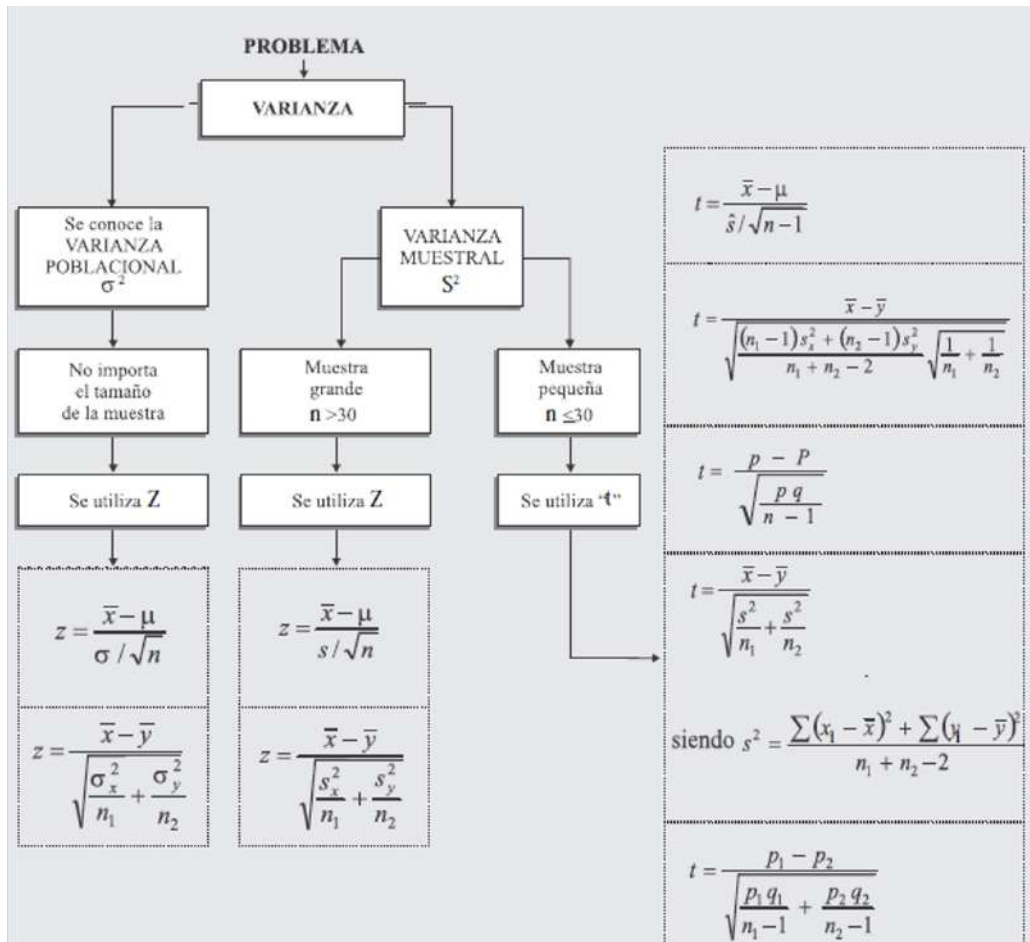
Fuente: Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Lorente J. (2005), Zill, D. G. y Wright, W. S. (2011) y Mora, F. W. (2016)

Además, si se impone la condición adicional que la curva pase por el punto (1,4) implica que las coordenadas de ese punto deben satisfacer  $Y = X^2 + C$  dando que  $4 = 1 + C$ , o sea,  $C = 3$ .

Después, la curva particular que se pide es la parábola  $Y = X^2 + 3$ . En función a todo lo anterior, su función de “t” es:

$$Y = C \left( 1 + \frac{t^2}{v} \right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

Figura 13 Distribución T- student



Fuente: Martínez (2012)

Grados de libertad, refiere a un número de valores a escoger libremente (Levin, 1996), según Pagano (2009), son el número de datos que son libres de variar cuando se calcula tal prueba o, según Box, Hunter y Hunter (2008), indican el

número de dimensiones en que vectores pueden variar libremente, introducida la expresión por Fisher, de un conjunto de observaciones están dados por el número de valores que pueden ser asignados arbitrariamente, antes que el resto de variables queden completamente determinadas.

Por ejemplo:

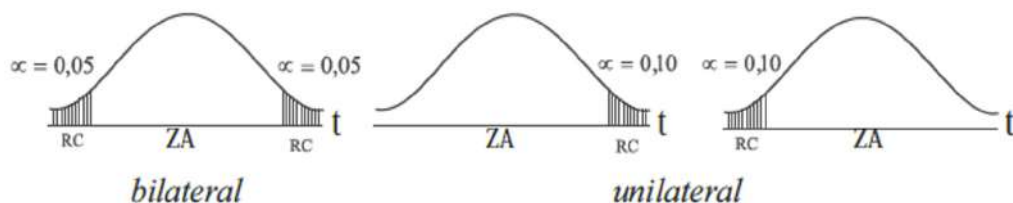
Si tiene valores de  $8 + 10 + 6 + 20 = 44$ , se observa que puede asignar tres valores arbitrariamente  $16 + 4 + 10 + 14 = 44$ , pero el cuarto debe ser 14 y no se puede asignar libremente, pues la suma debe ser 44. Por lo tanto,  $\nu = n - 1 = 4 - 1 = 3$ .

Donde;

$\nu$ : "nu" o "niu" representan los grados de libertad"

En la determinación de puntos críticos,  $t_1$  (inferior) y  $t_2$  (superior), se usa la tabla "t-Student". En primer lugar, se fija el nivel de significación, como  $\alpha = 0,05$ , luego se calculan los grados de libertad, siendo en distribuciones muestrales  $\nu = n - 1$  y en diferencias de medias muestrales:  $\nu = n_1 + n_2 - 2$ . Si la dócima<sup>7</sup> es bilateral se tomará el total, suponiendo que sea del 5 %, del nivel de significación, para cada una de las regiones críticas  $\alpha = 0,05$  y si es unilateral se tomará el doble del nivel de significación asignado, en este caso  $\alpha = 0,10$ .

Figura 14 Distribución T- student



Fuente: Martínez (2012)

Cuando el problema da la desviación típica muestral  $y$ , a la vez, el tamaño de la muestra es menor o igual a 30 ( $n < 30$ ), se considera que la desviación está sin corregir, procediendo a su corrección para ser aplicada en la variante estadística "t".

Se simboliza a:

$\hat{S}$ : desviación típica sin corregir

$S$ : desviación típica corregida

$t$ : valor  $t$  calculado

<sup>7</sup> Según Martínez (2012), "docimar" es equivalente a "probar" o "comprobar".

$$1) S = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$2) S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum(x_i^2 - n\bar{x})^2}{n-1}}$$

$$3) t_{(calculado)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n-1}}}$$

### Ejercicio 2.3.

Una muestra de 25 observaciones tiene una media de 42,0 y una desviación de 8. Trabajando con un nivel de significación del 1 %. ¿Existe razón para rechazar la hipótesis que la media de población es 46, 0?

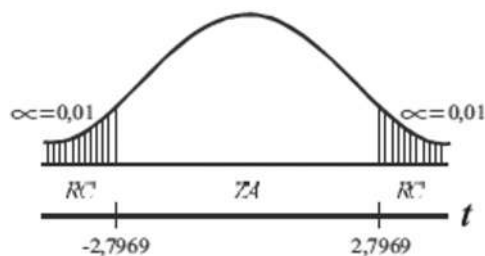
$$n = 25; \bar{x} = 42; \mu = 46 \text{ y } \hat{S} = 8$$

$$H_0: \mu_x = 46 \text{ y } H_a: \mu_x \neq 46$$

$$\alpha = 0,01$$

$$S = 8 * \sqrt{\frac{25}{24}} = 8(1,021) = 8,17$$

Figura 15 Distribución T- Student- Bilateral



Fuente: Martínez (2012)

Tomado de: Sánchez Turcios, Reinaldo Alberto. (2015).

$$t_{(calculado)} = \frac{42 - 46}{\frac{8,17}{\sqrt{25}}} = \frac{-20}{8,17} = -2,45 \text{ ó}$$



$$t_{(calculado)} = \frac{42 - 46}{\frac{8}{\sqrt{25 - 1}}} = -2,45$$

$$v = 25 - 1 = 24 \text{ y } \alpha = 0,01$$

$$t_{(n=24; \alpha=0,01)} = 2,797$$

Tabla 7 Nivel de significación para pruebas de una cola

Nivel de significación para pruebas de una cola						
Grados de libertad $v$	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
	Nivel de significación para pruebas de dos colas					
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,829	2,093	2,539	2,681	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767

24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,374
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
$\infty$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Fuente: Martínez (2012)

Regla de decisión:

Si  $|t_{c(-2,45)}| < |t_{t(2,797)}|$  No se rechaza  $H_0$  y no se acepta  $H_a$ .

#### Ejercicio 2.4.

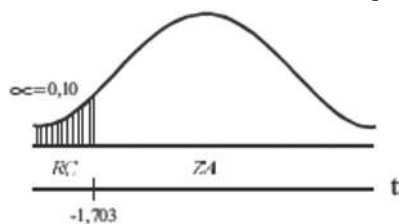
Una inspectora de calidad investiga las acusaciones contra la fábrica de cerveza Pilsener porque no llena bien sus envases, afirmando que contienen 35 onzas de líquido (prueba de cola izquierda). Se muestrearon 28 botellas de su cerveza, encontrando un contenido medio de 33,2 onzas con una desviación estándar de 2,2 onzas ¿Debe la inspectora llegar a la conclusión, con nivel del 5 %, que el contenido es superior al detallado en el envase?

$$n = 28; \bar{x} = 33,2; \mu = 35; \hat{S} = 2,2 \text{ y } \nu = 28-1 = 27$$

$$H_0: \mu_x = 35 \text{ y } H_a: \mu_x < 35$$

$$\alpha = 0,05$$

Figura 16 Distribución T- Student- Unilateral Izquierda



Fuente: Martínez (2012)

Tomado de: Sánchez Turcios, Reinaldo Alberto. (2015).

$$S = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{n-1}} = 2,2 * \sqrt{\frac{28}{27}} = 2,24$$

$$t_{(calculado)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{33,2 - 35}{\frac{2,24}{\sqrt{28}}} = -4,25 \text{ ó}$$

$$t_{(calculado)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{33,2 - 35}{\frac{2,2}{\sqrt{28-1}}}$$

$$v = 28 - 1 = 27 \text{ y } \alpha = 0,05$$

$$t_{(n=27; \alpha=0,05)} = 1,703$$

Regla de decisión:

Si  $|t_c (-4,25)| > |t_t (1,703)|$  No se acepta  $H_0$  y no se rechaza  $H_a$ .

Observación: El valor  $t_{(n=27; \alpha=0,05)} = 1,703$ , ubicado en “prueba de una sola cola” y, equivalente a ello, es 10 % en “prueba de dos colas”, equivalente al doble.

### Ejercicio 2.5.

Un fabricante desea hacer público, a fin de aumentar sus ventas, que el contenido de nicotina de sus cigarrillos tiene un promedio inferior a los 22 mg. Una oficina gubernamental de salud y del medio ambiente, realiza un análisis de 10 cigarrillos y obtiene sus contenidos de nicotina para cada uno:

21    24    18    16    22    23    20    20    24    16     $\Sigma = 204$

a) ¿Tiene justificación lo aseverado por el fabricante?

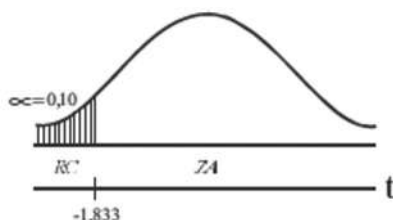
$$n = 10; \bar{x} = 20,4; \mu = 22; S = \sqrt{\frac{\sum(x_i^2 - n\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{4,242 - 10(20,4^2)}{10-1}} = 2,99$$

$$v = 10 - 1 = 9$$

$$H_0: \mu_x = 22 \text{ y } H_a: \mu_x < 22$$

$\alpha = 0,05$  dos colas (error en  $\alpha$  de gráfica)

Figura 17 Ejercicio 2.5: Distribución T- Student- Unilateral Izquierda



Tomado de: Sánchez Turcios, Reinaldo Alberto. (2015).

$$t_{(calculado)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{20,4 - 22}{\frac{2,99}{\sqrt{10}}} = -1,69$$

$$v = 10 - 1 = 9 \text{ y } \alpha = 0,10$$

$$t_{(n=9; \alpha=0,10)} = 1,833$$

Regla de decisión:

Si  $|t_{c(-1,69)}| < |t_{r(1,833)}|$  No se rechaza  $H_0$  y no se acepta  $H_a$ .

¿Cuándo se cometerá un error Tipo II ( $\beta$ )?

Aceptar que  $\mu_x=22$  mg cuando el contenido de nicotina es, en realidad, diferente (no rechazar  $H_0$ :  $\mu_x=22$  cuando es falsa).

b) ¿Cuándo se cometerá un error Tipo II ( $\beta$ )?

Aceptar que  $\mu_x = 22$  mg cuando el contenido de nicotina es, en realidad, diferente (no rechazar  $H_0$ :  $\mu_x = 22$  cuando es falsa).

### Ejercicio 2.6.

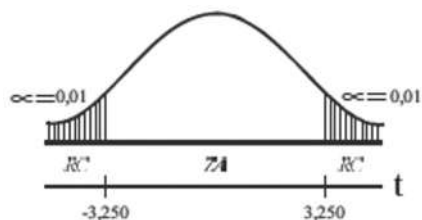
Una muestra aleatoria de 10 vigas de acero, tiene una resistencia media a la compresión de 57 498 libras(lb)/pulgada<sup>2</sup> ("<sup>2</sup>)(l.p.c.), con una desviación típica de 539 l.p.c. Docimar la hipótesis que la verdadera resistencia media a la compresión de las vigas de acero de las que se extrajo la muestra  $\mu=57\ 000$ . Utilizar la alternativa bilateral  $\mu \neq 57\ 000$  con un nivel de significación del 1 %.

$$n = 10; \bar{x} = 57\ 498; \mu = 57\ 000 \text{ y } \hat{S} = 539$$

$$H_0: \mu_x = 57\ 000 \text{ y } H_a: \mu_x \neq 57\ 000$$

$$\alpha = 0,01$$

Figura 18 Ejercicio 2.6: Distribución T- Student- Bilateral



Fuente: Martínez (2012)

Tomado de: Sánchez Turcios, Reinaldo Alberto. (2015).

$$t_{(calculado)} = \frac{57\,498 - 57\,000}{\frac{539}{\sqrt{10 - 1}}} = \frac{498(3,0)}{539} = 2,77$$

$$v = 10 - 1 = 9 \text{ y } \alpha = 0,01$$

$$t_{(n=9; \alpha=0,01)} = 3,250$$

Regla de decisión:

Si  $|t_{c(2,77)}| < |t_{t(3,250)}|$  No se rechaza  $H_0$  y no se acepta  $H_a$ .

### Ejercicio 2.7.

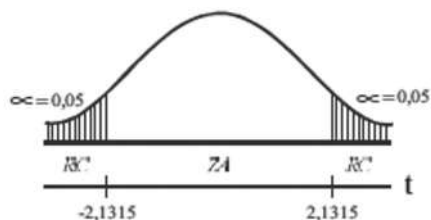
Un fabricante de ciertas piezas de proyectil sostiene que, en condiciones normales de operación, tienen una duración media  $\mu=320$  hr. Docimar esta afirmación frente a la alternativa  $\mu \neq 320$  hr, si 19 piezas duran un promedio de 308 hr con una desviación estándar de 29 hr. Use un nivel de significancia del 5 %.

$$n = 16; \bar{x} = 308; \mu = 320 \text{ y } \hat{S} = 29$$

$$H_0: \mu_x = 320 \text{ y } H_a: \mu_x \neq 320$$

$$\alpha = 0,05$$

Figura 19 Ejercicio 2.7: Distribución T- Student- Bilateral



Fuente: Martínez (2012)

Tomado de: Sánchez Turcios, Reinaldo Alberto. (2015).

$$t_{(\text{calculado})} = \frac{308 - 320}{\frac{29}{\sqrt{16 - 1}}} = \frac{-12(3,87)}{29} = -1,60$$

$$v = 16 - 1 = 15 \text{ y } \alpha = 0,05$$

$$t_{(n=15; \alpha=0,05)} = 2,131$$

Regla de decisión:

Si  $|t_c (-1,60)| < |t_t (2,131)|$  No se rechaza  $H_0$  y no se acepta  $H_a$ .

## Distribución F-Fisher

Cuando se hizo la prueba de “*t-Student*” (muestras pequeñas) se efectuó en pruebas de hipótesis para diferencias entre medias muestrales y se estableció con base en los supuestos (Martínez, 2012):

El primero, el más utilizado, que las muestras provienen de dos poblaciones con varianzas idénticas, aceptando a ciegas que fuera cierto.

Segundo, bajo el supuesto, que las varianzas poblacionales fueran diferentes. Ahora, se trata de probar mediante la aplicación de Distribución F, la validez que las varianzas poblacionales sean idénticas o diferentes.

La Distribución F, desarrollada por Sir Ronald Aylmer Fisher (Londres, Reino Unido, 17 de Febrero de 1890 – Adelaida, Australia, 29 de Julio de 1962) estadístico y biólogo, es una medida muy diferente a las otras vistas, “*t-Student*”– $X^2$ , no es simétrica y su forma depende del número de grados de libertad asociadas con  $S_1^2$  y  $S_2^2$ . Siguiendo procedimientos conocidos, primero se plantean las hipótesis, nivel de significancia, grados de libertad, se determina el valor F en la variante estadística y, finalmente, se toma la decisión de no rechazar o no aceptar que las varianzas poblacionales sean idénticas:

$$1) H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ vs } H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

$$2) \alpha = 0,05$$

$$3) F_c = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{\text{Varianza mayor}}{\text{Varianza menor}}$$

4)  $\nu_1 = n_1 - 1$  (gl numerador) y  $\nu_2 = n_2 - 1$  (gl denominador)

5)  $F_t$  = Punto de intersección entre  $\nu_1$  y  $\nu_2$

$\nu_1$  (Se leerá en la primera línea o renglón de tabla)

$\nu_2$  (Se leerá en la primera columna de tabla)

### Ejercicio 2.8.

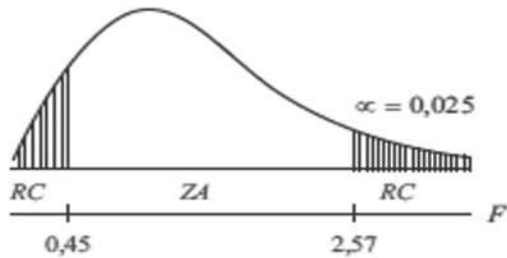
Localice los valores de F, usando la tabla respectiva, dependiendo del nivel de significancia:

Casos			
Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
$\nu_1 = 12$	$\nu_1 = 15$	$\nu_1 = 20$	$\nu_1 = 14$
$\nu_2 = 16$	$\nu_2 = 20$	$\nu_2 = 80$	$\nu_2 = 17$
$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
$F_t = 2,42$	$F_t = 3,13$	$F_t = 1,70$	$F_t = 3,35$

Conociendo el manejo de Tabla F, se procede a la realización de pruebas de hipótesis, con el fin de establecer si hay o no variabilidad en las dos poblaciones, de donde se extrajeron las muestras:

Suponga la selección de dos muestras, de tamaños  $n_1 = 21$  y  $n_2 = 16$ , cuyas varianzas muestrales son  $S_1^2 = 57,12$  y  $S_2^2 = 25,68$ , respectivamente. ¿Dan estos resultados suficiente evidencia, que haga pensar que las varianzas poblacionales sean distintas? Use nivel de significancia del 5 %.

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\nu_1 = 21 - 1 = 20$	$S_1^2 = 57,12$
$\alpha = 0,05$	$\nu_2 = 16 - 1 = 15$	$S_2^2 = 25,68$
$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\text{Varianza mayor}}{\text{Varianza menor}} = \frac{57,12}{25,68}$ $= 2,22$		$F_{t(20,15; \alpha=0,05)} = 2,33$
Regla de decisión:		
Si $ F_c(2,22)  <  F_{(\alpha, k-1, N-k)}(2,33) $ No se rechaza $H_0$ y no se acepta $H_a$		

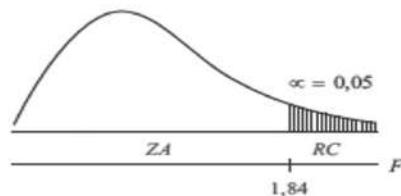


Fuente: Martínez (2012)

### Ejercicio 2.9.

Se realizan dos procesos diferentes en la fabricación de un determinado producto. Durante un periodo de observación de 31 días, se determinó el número de unidades producidas con sus respectivas varianzas. Estos resultados en su orden fueron: 290 y 296 unidades, con varianzas de 1 102,24 y 528,70, respectivamente. ¿Presentan estos resultados suficiente evidencia para concluir, con significación del 5 %, que la variabilidad en la producción diaria es superior en uno de los procesos?

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_a: \sigma_1^2 > (\neq) \sigma_2^2$	$n_1 = 31$ $n_2 = 31$	$S_1^2 = 1\,102,24$
$\alpha = 0,05$	$v_1 = 31 - 1 = 30$	$S_2^2 = 528,70$
$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\text{Varianza mayor}}{\text{Varianza menor}} = \frac{1\,102,24}{528,70} = 2,09$	$v_2 = 31 - 1 = 30$	$F_{t(30,30; \alpha=0.05)} = 1,84$
Regla de decisión: Si $ F_c(2,09)  > F_{(\alpha, k-1, N-k)(1,84)}$ No se acepta $H_0$ y no se rechaza $H_a$		



Fuente: Martínez (2012)

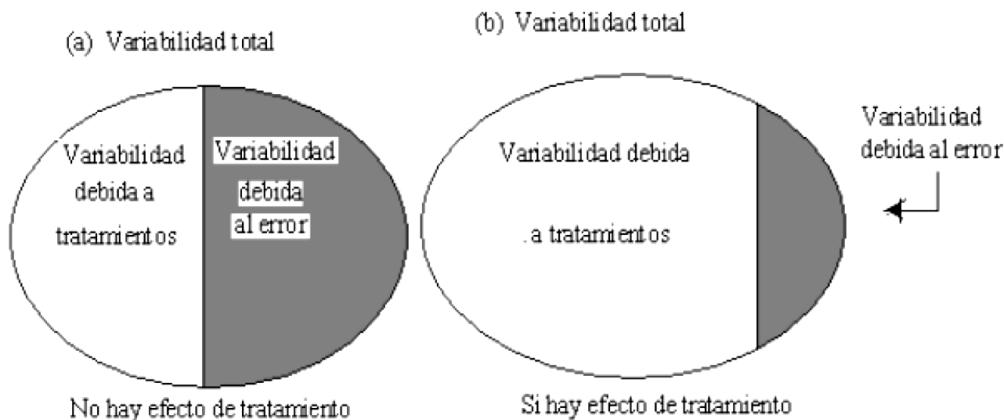


### CAPÍTULO III

## 3. PRUEBAS DE COMPARACIÓN DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS

Aunque en origen el Análisis de la Varianza (AOV, ANOVA, ADEVA, AN-DEVA ó ANVA) fue introducido por Fisher para evaluar los efectos de los distintos niveles de un factor sobre una variable respuesta continua, desde un punto de vista puramente abstracto el ANOVA va a permitir generalizar el contraste de igualdad de medias de dos a  $k$  poblaciones (Arriaza, et. al. 2008). Es decir, al estudiar el comportamiento de los tratamientos de un factor, mediante un análisis de la varianza, el único objetivo es saber si globalmente dichos tratamientos difieren significativamente entre sí o conocer qué tratamientos concretos producen mayor efecto o cuáles son los tratamientos diferentes entre sí. El nombre de análisis de varianza (ANOVA) viene del hecho de que se utilizan cocientes de varianzas para probar la hipótesis de igualdad de medias. La idea general de esta técnica es separar la variación total en dos partes: la variabilidad debida a los tratamientos y la debida al error. Cuando la primera predomina claramente sobre la segunda es cuando se concluye que los tratamientos tienen efecto; es decir, las medias son diferentes. Cuando los tratamientos contribuyen igual o menos que el error, se concluye que las medias son iguales (González, 2010):

Figura 20 Variación total en un DCA



Fuente: Hurtado y Gómez (2010)

No se propondrá pues ningún modelo teórico, sino que el objetivo se limitará a usar la técnica para contrastar la hipótesis  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k = \mu(0)$  vs  $H_a: \mu_i \neq \mu_j$  para algún  $i \neq j$  ó  $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_k = 0$  vs  $H_a: \tau_i \neq 0$  para algún  $i$ . Al igual que se ha hecho para una y dos poblaciones, se evaluarán las hipótesis previas relativas a la calidad de la muestra, a la estructura de probabilidad, normal o no, de la población y a si las distintas poblaciones tienen varianzas iguales o distintas, propiedad esta última conocida como homocedasticidad (Arriaza, *et. al.* 2008).

Se explica algunas técnicas para analizar con mayor detalle los datos de un experimento, con posterioridad a la realización del Análisis de Varianza. Si este análisis confirma que la prueba  $F$  del análisis de la varianza resultó al menos significativa al 5 % o “*Fisher Protegido*” es conveniente investigar qué medias son distintas, también es necesario indicar que para calcular matrices de comparaciones de medias de tratamiento debe existir al menos una diferencia mínima significativa denotada por algunos softwares como  $R$ . Para ello, se usan diversas técnicas cuyo objeto es identificar qué tratamientos son estadísticamente diferentes y en cuánto oscila el valor de esas diferencias.

En algunos casos, el uso de estas técnicas está supeditado al resultado del análisis de varianza; en otros casos, las técnicas pueden emplearse directamente sin haber realizado previamente dicho análisis. Este conjunto de técnicas se engloba bajo la denominación de *contrastos para comparaciones múltiples*, pues su objetivo fundamental es comparar entre sí medias de tratamientos o grupos de ellas. En primer lugar, se estudia un procedimiento intuitivo y cualitativo basado en la representación gráfica de los datos del experimento. Después del método gráfico, se considera la técnica de comparación por parejas introducida por Fisher en 1935 llamada *método de la diferencia mínima significativa o método LSD (Least Significant Difference)*, basada en la construcción de tests de hipótesis para la diferencia de cualquier par de medias.

Cuando el número de posibles comparaciones es elevado, la aplicación reiterada de este procedimiento, para un nivel de significación  $\alpha$  dado, puede conducir a un número grande de rechazos de la hipótesis nula aunque no existan diferencias reales. El intento de disminuir el problema de falsos rechazos justifica la introducción de otros procedimientos para comparaciones múltiples. Entre estos métodos se estudia primero el basado en la desigualdad de Bonferroni.

A continuación, se aborda otra forma de solventar las deficiencias mencionadas anteriormente basada en el rango estudentizado, que da lugar al método de la diferencia significativa honesta propuesto por Tukey o método HSD (*Honestly Significant Difference*) y procedimientos de rangos múltiples de Newman-Keuls y Duncan. Finalmente, se estudia el procedimiento general de Scheffé, basado en la construcción de intervalos de confianza simultáneos para todas las posibles diferencias de medias y que permite su extensión a comparaciones más generales denominadas contrastes.

Otro problema de índole diferente ligado a las comparaciones múltiples consiste en las comparaciones de distintos tratamientos con un control que suele emplearse en determinados campos de investigación; por ejemplo, en estudios epidemiológicos. Dicho problema se aborda mediante el contraste de Dunnett.

### 3.1. GRÁFICAS

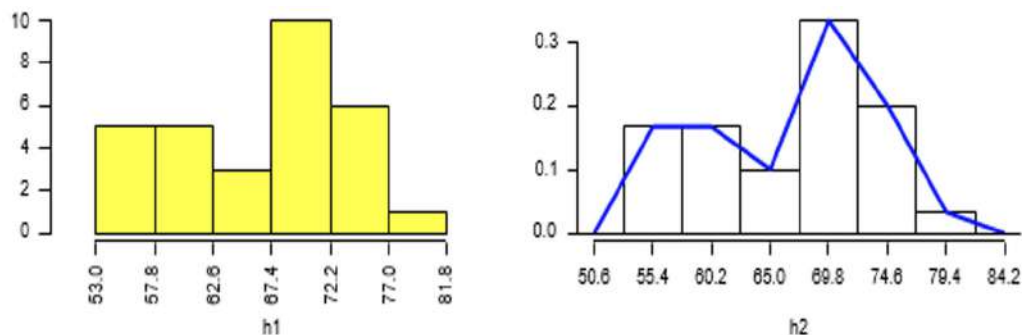
El paquete “agricolae” en R ofrece una amplia funcionalidad en el diseño de experimentos, específicamente para la gestión del histograma y la función hist. Algunos de los métodos gráficos usados más comúnmente en diseños experimentales son (Mendibiru, 2010):

#### 3.1.1. Histograma

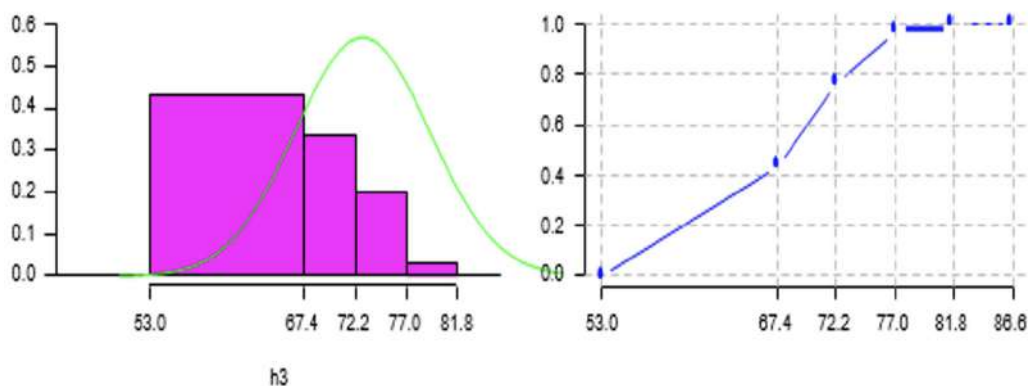
Es aquella representación gráfica de estadísticas de diferentes tipos. La utilidad del histograma tiene que ver con la posibilidad de establecer de manera visual, ordenada y fácilmente comprensible todos los datos numéricos estadísticos que pueden tornarse difíciles de entender.

Hay muchos tipos de histogramas (ver figura 16) y cada uno se ajusta a diferentes necesidades como también a diferentes tipos de información. El histograma se construye en R con la función `graph.freq` y se asocia a otras funciones: `poly-gon.freq`, `table.freq`, `stat.freq`.

Figura 21 Histogramas



Fuente: Mendiburu (2010)



Fuente: Mendiburu (2010)

### 3.1.2. Gráficas de caja con bigotes ó *Blox-Plot* en inglés

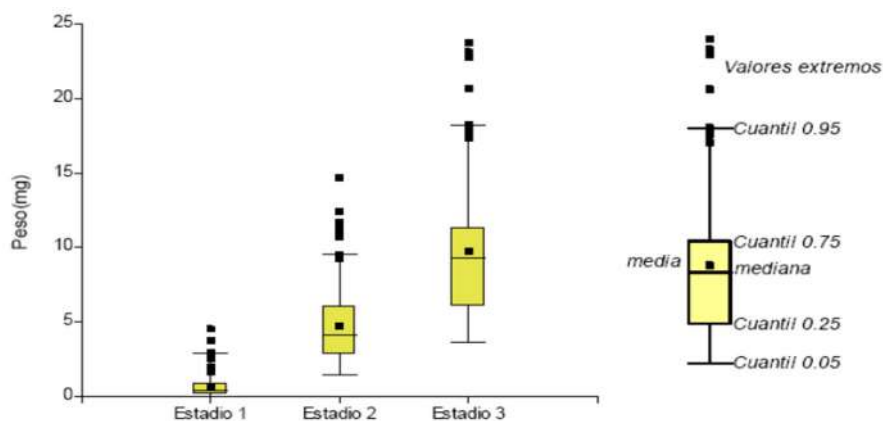
Es una forma de presentación estadística destinada, fundamentalmente, a resaltar aspectos de la distribución de las observaciones en una o más series de datos cuantitativos. Reemplaza, en consecuencia, al histograma y a la curva de distribución de frecuencias sobre los que tiene ventajas en cuanto a la información que brinda y a la apreciación global que surge de la lectura.

Fue ideado por John Tukey, de la Universidad de Princeton (U.S.A.) en 1977 y los detalles que siguen corresponden a la descripción dada por este autor: caja es un rectángulo que abarca el recorrido (o rango, o intervalo) intercuartílico (*RIC*) de la distribución; o sea, el tramo de la escala que va desde el primer cuartil (*CI*) al tercer cuartil (*C3*) que incluye el 50 % de las observaciones centrales, la mediana se dibuja mediante una línea (algunos lo marcan con

un asterisco, otros con una cruz) dentro de la caja y la altura de la escala que corresponde al valor de esa medida, bigotes son líneas que salen a los costados de la caja y que sirven como referencia para ubicar las observaciones que están por fuera del 50 % central de la distribución, cercados interiores indica la finalización de los bigotes, por lo que a veces no se dibujan, cercados exteriores ubicados más periféricamente en la distribución, por lo que casi nunca se dibujan, periféricos (periféricos próximos) es el señalamiento de las observaciones que se encuentran entre el cercado interior y el cercado exterior, suelen marcarse con un asterístico o una “o” y periféricos lejanos (periféricos extremos) es el señalamiento de las observaciones que se encuentran fuera del cercado exterior, suelen marcarse con un punto grande, “E” o “X”.

En la figura 17 se ejemplifica las gráficas de caja con bigotes.

Figura 22 Gráficas de caja con bigotes

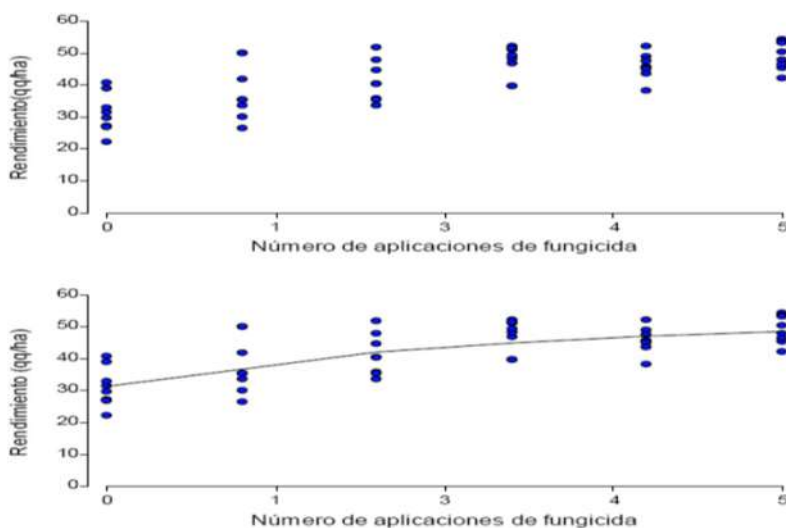


Fuente: Mendiburu (2010)

### 3.1.3. Gráficas de dispersión

Son una forma fenomenal de expresar datos de dos variables, y hacer predicciones basadas en los datos. Al contrario de los histogramas y los diagramas de caja, los de dispersión muestran valores de datos individuales. En general, la variable independiente (variable que no está influenciada por nada) está en el eje x y la variable dependiente (modificada por la variable independiente) está en el eje y. Se suele usar la "línea de ajuste" para hacer predicciones basándose en datos pasados (ver figura 18).

Figura 23 Gráficas de dispersión

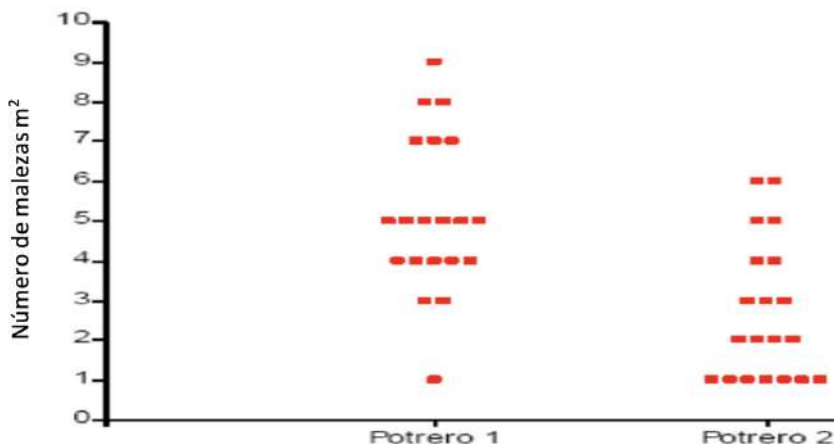


Fuente: Mendiburu (2010)

### 3.1.4. Gráficas de densidad de puntos

Al igual que los histogramas, son útiles para mostrar la distribución de una única variable de escala. Los datos están agrupados, pero en vez de un valor para cada intervalo (recuento) se muestran y apilan todos los puntos en cada intervalo. A estos gráficos a veces se los denomina gráficos de densidad.

Figura 24 Gráficas de densidad de puntos

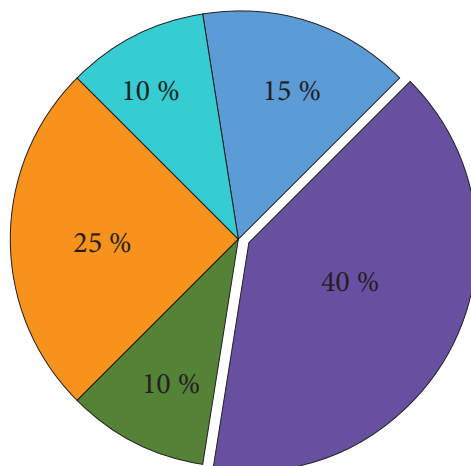


Fuente: Mendiburu (2010)

### 3.1.5. Gráficas de sectores circulares

Es un gráfico que consiste en un círculo dividido en sectores de amplitud proporcional a la frecuencia de cada valor. Se utiliza con datos cualitativos y cuantitativos.

Figura 25 Gráficas de sectores circulares



Fuente: Mendiburu (2010)

## 3.2. FACTORES CUALITATIVOS

### 3.2.1. Basadas en Distribución $t$

#### 3.2.1.1. Diferencia mínima significativa, $t$ de Fisher o *lower significant difference* (LSD)

Se llama diferencia mínima significativa, pues es la diferencia mínima que debe haber entre dos medias muestrales para poder considerar que los tratamientos son significativamente diferentes. Es una prueba para comparar dos medias y su uso en comparaciones simultáneas se justifica sólo en las siguientes condiciones (Padrón, 2006):

- La prueba F resulta significativa
- Las comparaciones fueron planeadas antes de ejecutar el experimento.

Tabla 8 Comparaciones de Diferencia Mínima Significativa (DMS o LSD)

Comparaciones de Diferencia Mínima Significativa (DMS o LSD)	
Ventajas	Desventajas
1. Es fácil de calcular y simple uso.	No toma en consideración el número de tratamientos dentro de un experimento (no ofrece protección cuando el número de medias aumenta después de 2 y puede darse la situación que demasiadas medias aparecen como significativas).
2. La prueba es válida cuando se hacen comparaciones planeadas de antemano, comparaciones identificadas con objetos del experimento.	2. Da pruebas correctas cuando se comparan dos medias de tratamientos.
3. Da resultados satisfactorios cuando se compara cada una de las medias con el testigo: $\bar{x}_2$ vs $\bar{x}_1$ ; $\bar{x}_3$ vs $\bar{x}_1$ ; $\bar{x}_4$ vs $\bar{x}_1$ .	3. No se debe usar a menos que el valor $F_c$ del ANOVA o ADEVA dé un valor significativo.
	4. $Pr(\text{Error Tipo I})$ aumenta en comparaciones individuales.
	5. Cuando se hacen comparaciones no ortogonales (una $\bar{x}_i$ se involucra $\geq 1$ comparación) puede concluir erróneamente que hay mayor información de la existente

Algunos valores importantes para las comparaciones son:

a) Error Típico de la Media ( $s\bar{x} = \sqrt{\frac{S^2_{(o\ CME_E)}}{r}}$ )

b) Error Típico de Diferencia entre Medias de Tratamientos ( $s\bar{d} = \sqrt{2 \frac{S^2_{(o\ CME_E)}}{r}}$ )

c) Coeficiente de Variación

$$CV = \left( \frac{\sqrt{S^2}}{\bar{x}_{ij}} \right) (100)$$

La DMS es la prueba más fácil de calcular y quizás la más común para comparar pares de medias de tratamientos.

$$DMS = t * \sqrt{\frac{2S^2}{r}} = t * \sqrt{2 \frac{S^2_{(o\ CME_E)}}{r}}$$

Donde:

$t$ : grados de libertad de error

$S^2$ : error

$r$ : número de repeticiones



Observaciones (Mendibiru, 2015):

- Un problema que presenta la aplicación de este procedimiento, para un número relativamente grande de tratamientos, es que el número de posibles falsos rechazos de la hipótesis nula puede ser elevado; aunque, no existan diferencias reales.
- Otra forma de enfocar este problema es comprobando que la utilización reiterada de este procedimiento conduce a que la probabilidad de que se rechace al menos una de las posibles comparaciones sea bastante alta.
- Puede suceder que el método LSD falle al aceptar que todas las parejas son iguales, a pesar de que el estadístico F del análisis de la varianza resulte significativo; esto es debido a que la prueba F considera simultáneamente todas las posibles comparaciones entre las medias de los tratamientos y no sólo las comparaciones por parejas.
- En la siguiente sección se describe el método de Bonferroni, que presenta una solución al problema de los falsos rechazos planteado en el método LSD.

### 3.2.1.2. Estadístico t de Bonferroni para inferencia simultánea

La aproximación que se sugiere se basa en desigualdad de Bonferroni, pues se cuenta con tablas de probabilidad basadas en ella. Esta aproximación también se puede usar para métodos menos estructurados, como pequeños conjuntos de comparaciones y contrastes polinomiales ortogonales, para obtener una protección de media de error en inferencia simultánea.

La desigualdad de Bonferroni proporciona un medio para obtener una aproximación sencilla a tasas de error en comparaciones múltiples. La desigualdad traducida al contexto, muestra que tasa de error para la familia de comparaciones es menor o igual que la suma de tasas de error de comparaciones individuales.

Cuando se hacen  $n$  comparaciones con la misma tasa de error,  $\alpha_C$ , la desigualdad de Bonferroni produce la relación:

$$\alpha_E \leq n \alpha_C$$

donde;

$\alpha_E$ : Tasa máxima deseada de error para familia

$n$ : número de pruebas simultáneas

$\alpha_C$ : Tasa de error

La desigualdad de relación se cumple cuando las pruebas son independientes. La tasa de error para cada comparación para el estadístico de prueba se determina dividiendo la tasa máxima deseada de error para la familia entre el número de pruebas simultáneas,

$$\alpha_C = \left[ \frac{\alpha_E}{n} \right].$$

Por ejemplo: con tres comparaciones en un experimento de carnes, una tasa de error

$$\alpha_E = 0,05$$

requiere una tasa de error con respecto a comparación de

$$\alpha_C = \left[ \frac{0,05}{3} \right] = 0,017$$

Valores tabulados para estadístico  $t$  de Student, en relación con  $t$  de Bonferroni, se da como:

$$t_{(\alpha_E/2; k; v)},$$

$k$ : número de comparaciones

$v$ : grados de libertad

para pruebas de dos colas. Los valores también se pueden obtener con software que calcule probabilidades para distribución  $t$  de Student, con probabilidad de cola superior de  $\left[ \frac{\alpha_E}{2k} \right]$ .

### Por ejemplo:

$t$  de Bonferroni para comparaciones  $k - 3$  de dos colas con  $v = 8$  grados de libertad y  $\alpha_E = 0,05$  es  $t_{(0,025;3;8)} = 3,02$ .

Equivalente, es posible hallar el valor si se determina el valor de  $t$  de Student para  $v=8$  grados de libertad, excedido con probabilidad

$$\left[ \frac{\alpha_E}{2k} \right] = \left[ \frac{0,05}{2(3)} \right] = 0,00833$$

La estimación de intervalos de confianza simultáneos (ICS) para comparaciones es una estimación de intervalos que cumplen simultáneamente con nivel de confianza  $100 * (1 - \alpha_E) \%$ . Los intervalos de confianza simultáneos usan estadístico  $t$  de Bonferroni en vez  $t$  de Student. El intervalo de confianza  $100 * (1 - \alpha_E) \%$  de dos colas es:

$$C \pm \left[ \frac{\alpha_E}{2k} \right] * [S_c]$$

Sabiendo que:

$S_c$ : Desviación estandar de comparaciones

### 3.2.1.3. Dunn-Bonferroni

En este procedimiento se fija un nivel de significación  $\alpha$  que se reparte entre cada una de las comparaciones consideradas y se utiliza la desigualdad de Bonferroni. Esto se debe a que muchas veces se está interesado en determinar  $r$  intervalos de interés con  $(1 - \alpha) \%$  de confianza.

La probabilidad que  $r$  intervalos estén simultáneamente correctos es en el mínimo  $(1 - r\alpha) \%$ . La probabilidad  $r * \alpha$  frecuentemente es llamada coeficiente global de confianza. Eso implica que a medida que  $r$  aumenta, el nivel de confianza del conjunto de intervalos de confianza disminuye. Con la finalidad de contornear ese problema, en vez de usar  $\frac{\alpha}{2}$  en las ecuaciones  $\bar{y}_{it} - t_{\alpha/2}$ ,

$$\alpha(n - 1) \sqrt{\frac{CME_{(Error)}}{n}} \leq \mu_i \leq \bar{y}_{it} + t_{\alpha/2}, \alpha(n - 1) \sqrt{\frac{CME_{(Error)}}{n}},$$

intervalo de confianza para la media del  $i$  e  $\bar{y}_{it} - \bar{y}_{jt} - t_{\alpha/2}$ ,

$$\alpha(n - 1) \sqrt{\frac{2 CME_{(Error)}}{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{y}_{it} - \bar{y}_{jt} + t_{\alpha/2}, \alpha(n - 1) \sqrt{\frac{2 CME_{(Error)}}{n}},$$

intervalo de confianza para la diferencia entre las medias de dos tratamientos, debe usarse  $\frac{\alpha}{2r}$ .

Ese procedimiento es conocido como el método de Bonferroni, permitiendo al experimentalista construir un conjunto de intervalos simultáneos de confianza para las medias de los tratamientos o para la diferencia entre las medias de los tratamientos para los cuales el nivel global de confianza es lo mínimo. Tal que (Mendibiru, 2015):

$$P_r\left(\bigcup_{m=1}^M A_m\right) \leq \sum_{m=1}^M P_r(A_m)$$

Suponga que se quiere realizar estimación por intervalos para las  $M = \binom{I}{2}$  comparaciones posibles, cada una al nivel de significación  $\alpha^* = \frac{\alpha}{M}$  que da origen a  $M$  intervalos de confianza que contienen a cada una de las posibles diferencias  $\mu_i - \mu_j$  con probabilidad  $1 - \alpha^*$ . Llamando  $C_m$  al intervalo  $m$ -ésimo se tiene que:

$$P_r[\mu_{1m} - \mu_{2m} \in C_m] = 1 - \alpha^* \quad m = 1, 2, 3, 4, \dots, M$$

Siendo  $\mu_{1m}$  y  $\mu_{2m}$  la primera y segunda media de la correspondiente comparación, donde

Se supondrá que  $1 \leq 1m < 2m \leq I$ . Aplicando la desigualdad de Bonferroni,  $P_r(\bigcup_{m=1}^M A_m) \leq \sum_{m=1}^M P_r(A_m)$ , se tendrá:

$$P_r\left(\bigcap_{m=1}^M C_m\right) = 1 - P_r\left(\bigcup_{m=1}^M \bar{C}_m\right) \geq 1 - \sum_{m=1}^M P_r(\bar{C}_m) = 1 - \sum_{m=1}^M \alpha^*$$

Se nota por  $\bar{C}_m$  al complementario del intervalo  $C_m$ . Teniendo en cuenta este resultado y si se quiere garantizar un nivel de significación  $\alpha$  para el conjunto de las  $M$  comparaciones por parejas, o un nivel de confianza  $1 - \alpha$  para el conjunto de intervalos, basta tomar:

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{M}$$

Con ello, evidentemente, la probabilidad de que todos los intervalos ( $C_m$ ) contengan a la correspondiente diferencia de medias, será al menos  $1 - \alpha$ . Así pues, los intervalos quedarán en la forma:

$$\bar{y}_{1m} - \bar{y}_{2m} \pm t_{\frac{\alpha}{2M}} \sqrt{\hat{S}_{Residual}^2 (CME_{(Error)}) \left(\frac{1}{n_{1m}} + \frac{1}{n_{2m}}\right)}$$

Donde  $\bar{y}_{1m}$ ,  $\bar{y}_{2m}$ ,  $n_{1m}$  y  $n_{2m}$  son las medias y los tamaños muestrales correspondientes a la comparación m-ésima. Se denotará por  $\theta_m = \mu_{1m} - \mu_{2m}$ ,  $m = 1, 2, 3, 4, \dots, M$ , una de las  $M$  comparaciones lineales por parejas de medias, para las cuales interesa contrastar  $H_0: \theta_m = 0$  vs  $H_a: \theta_m \neq 0$ . Entonces, no se acepta  $H_0$  si  $|\theta_m| > B_m$  y, en caso contrario, no se rechaza. Donde:

$$B_m = t_{\frac{\alpha}{2M}} \sqrt{\hat{S}_{Residual}^2 (CME_{(Error)}) \left( \frac{1}{n_{1m}} + \frac{1}{n_{2m}} \right)}$$

En el caso de modelo equilibrado, los valores de  $B_m$  coinciden, dichos valores se denotan por BSD y tienen la siguiente expresión:

$$BSD = t_{\frac{\alpha}{2M}} \sqrt{\hat{S}_{Residual}^2 (CME_{(Error)}) \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)}$$

Siendo  $n$  el número de observaciones de cada grupo y  $t_{\frac{\alpha}{2M}}$  el valor crítico de la distribución  $t$ , con el mismo número de grados de libertad que la varianza residual, que deja una probabilidad  $\frac{\alpha}{2M}$  a su derecha.

Observaciones (Mendibiru, 2015):

- Utiliza las pruebas de  $t$  para realizar comparaciones por pares entre las medias de los grupos, pero controla la tasa de error global estableciendo que la tasa de error de cada prueba sea igual a la tasa de error por experimento dividida entre el número total de contrastes. Así, se corrige el nivel de significación observado por el hecho de que se están realizando múltiples comparaciones.
- Un problema que presenta la aplicación de este procedimiento, para un número relativamente grande de tratamientos, es que el número de posibles falsos rechazos de la hipótesis nula puede ser elevado aunque no existan diferencias reales.

Basado en la distribución  $t$  de Student y en la desigualdad de Bonferroni. (Su promotor en 1961 fue Dunn-Bonferroni).

Controla la tasa de error dividiendo el nivel de significación ( $\alpha$ ) entre el número de comparaciones ( $K$ ) llevadas a cabo. Cada comparación se evalúa utilizando un nivel de significación  $\alpha_c = \alpha/K$ .

### 3.2.1.4. Dunnett o difference honestly significant (DHS)

El método de Dunnett ó DHS se utiliza en ANOVA, ADEVA, ANDEVA ó ANVA para crear intervalos de confianza para las diferencias entre la media de cada tratamiento y media de un grupo de control. Es decir, en muchos experimentos uno de los tratamientos es el control y el investigador está interesado en comparar cada una de las otras  $K - 1$  medias de los tratamientos contra el control; por lo tanto, existen  $K - 1$  comparaciones. Un procedimiento para realizar estas comparaciones es la prueba de Dunnett, desarrollada en 1964.

Si un intervalo contiene cero, entonces no existe diferencia significativa entre las dos medias comparadas. Se especifica una Diferencia Mínima Significativa ( $DMS_{Dunnett \text{ ó } DHS}$ ) para todas las comparaciones, tal que las diferencias entre medias de tratamientos menos la media del testigo deben ser mayores que ( $DMS_{Dunnett \text{ ó } DHS}$ ) para que estos sean considerados como estadísticamente significativos. Por lo tanto, el método de Dunnett determina los intervalos de confianza para cada comparación individual, según el caso.

Algunos valores importantes para las comparaciones son:

- a) Error Típico de la Media ( $s\bar{X} = \sqrt{\frac{S^2_{(o\ CME\ E)}}{r}}$ )
- b) Error Típico de la Diferencia entre Medias de Tratamientos ( $s\bar{d} = \sqrt{2 \frac{S^2_{(o\ CME\ E)}}{r}}$ )
- c) Coeficiente de Variación

$$CV = \left( \frac{\sqrt{S^2_{(CME\ error)}}}{\bar{X}_{ij}} \right) \quad (100)$$

La DMS es la prueba más fácil de calcular y quizás la más común para comparar pares de medias de tratamientos.

$$DMS = t_{(gl\ de\ error)} * \sqrt{\frac{2S^2}{r}} = t_{(gl\ de\ error)} * \sqrt{2 \frac{S^2_{(o\ CME\ E)}}{r}}$$

### 3.3. TEST DE RANGOS MÚLTIPLES

#### 3.3.1. Duncan o rangos múltiples de Duncan

Es otra prueba para determinar la diferencia entre pares de medias después que se ha rechazado la hipótesis nula en el análisis de varianza. Su ventaja es que no necesita que el *valor F* sea significativo para usarla. Es una prueba más estricta que *LSD* de Fisher, Diferencia Mínima Significativa, *DMS*, *LSD*, *t* de Fisher ó *Least Significant Difference*, permite comparar todas las medias entre sí sin restricciones y consiste en calcular varios "Rangos Mínimos Significativos" (RMS) de Duncan a partir de la multiplicación de "Rangos Mínimos de Duncan" (RMD) obtenidos de la tabla "Valores para la Prueba de Duncan", según número de promedios incluidos en rango comparativo y grados de libertad del error, por  $s\bar{X} \left( \sqrt{\frac{S_{(o)CME}^2}{r}} \right)$ .

Tal que, las diferencias entre  $\bar{x}_i$  deben sobrepasar el valor RMS para ser significativas. Cuando se redondean las medias, los valores de RMS se deben redondear por igual (González, 1985 y Padrón, 1996).

Observaciones (Mendibiru, 2015):

- Prueba intermedia de exigencia en comparación de Diferencia Mínima Significativa, *DMS*, *LSD*, *t* de Fisher ó *Least Significant Difference* y Prueba de Tukey (HSD). Hasta la década de los 80's era la prueba de mayor uso.
- Puede utilizar  $\alpha = 5$  o  $1$  %. Determinando la prueba después de ser al menos significativa *F* de Fisher.
- Su proceso de aplicación es igual a la Prueba de Tukey, pero los valores se buscan en tabla "Valores para la Prueba de Duncan" exclusivamente.
- Para la aplicación del test de rango múltiple de Duncan, una vez que las medias estén en orden ascendente, se calculan las diferencias entre las medias, comenzando por el valor más pequeño frente al más alto de las  $p = I$  medias de los tratamientos, comparando esta diferencia con el valor RI con un nivel de significación  $\alpha_1$ .
- La probabilidad de rechazar erróneamente al menos una hipótesis nula; es decir, la probabilidad de detectar incorrectamente como significativa la diferencia entre dos medias de un grupo de tamaño  $p$ , es el nivel de significación conjunto  $\alpha_p$ .

### 3.3.2. Student-Newman-Keuls (SNK) o Método de Keul

Este contraste fue desarrollado por Newman D. en 1939 y ampliado por Keuls M. en 1952, se suele denominar contraste de Newman-Keuls. Al igual que el contraste de Duncan, es un procedimiento iterativo y, desde el punto de vista operacional, es similar a dicho método.

Es una prueba más estricta que LSD de Fisher, Diferencia Mínima Significativa, DMS, LSD, t de Fisher ó Least Significant Difference y Duncan o Rangos Múltiples de Duncan, permite comparar todas las medias entre sí sin restricciones y consiste en calcular varios "Rangos Mínimos Significativos de Student-Newman-Keuls" (RMSSNK) a partir de la multiplicación de "Diferencia Mínima Significativa de Student-Newman-Keuls" (SNK) obtenidos de la tabla "Valores para la Prueba de Tukey", según número de promedios de tratamientos incluidos en rango comparativo y grados de libertad del error, por  $s\bar{x} \left( \sqrt{\frac{S^2(o\ CME\ E)}{r}} \right)$ .

Tal que, las diferencias entre  $\bar{x}_i$  deben sobrepasar el valor RMSSNK para ser significativas. Cuando se redondean las medias, los valores de RMSSNK se deben redondear por igual (González, 1985 y Padrón, 1996).

Observaciones (Mendibiru, 2015):

- El contraste de Student-Newman-Keuls es más conservador que el de Duncan en el sentido de que el error de tipo I es menor.

En el contraste de Student-Newman-Keuls el nivel de significación es  $\alpha$ , en cambio en el contraste de Duncan es  $\alpha_p$ , cuyo valor cambia dependiendo del número de medias comprendidas entre las que se comparan. Sin embargo, autores como Mendibiru (2015) afirman "es más difícil declarar que dos medias son significativamente diferentes al utilizar prueba Student-Newman-Keuls que si se usa la Prueba de Duncan o Rangos Múltiples de Duncan".

Por lo tanto, la potencia de la prueba de Student-Newman-Keuls es menor que la del procedimiento de Duncan o Rangos Múltiples de Duncan porque generalmente  $\alpha$  es menor que  $\alpha_p$ . En cambio, en la práctica esta prueba es más exigente que Duncan o Rangos Múltiples de Duncan y menor que la Diferencia Significativa Honesta ó Honestly-Significant-Difference (HSD) de Tukey. Sin embargo, su nivel de uso es bajo.



### 3.3.3. Ryan, Einot and Gabriel and Welsch ó REGWF

Es una abreviatura para la prueba de  $q$  de Welch, Ryan, Einot y Gabriel, pues es un procedimiento múltiple por pasos (tamaño de distancias) de Ryan-Einot-Gabriel-Welsch que se basa en una prueba  $F$ . Ésta prueba trabaja con la misma lógica que Bonferroni, excepto que cada prueba se ejecuta en el  $\alpha/(r/k)$  donde:

$k$ : número de medias en el experimento y

$r$ : es intervalos de interés con  $(1 - \alpha)$  % de confianza.

Se trata de un método por pasos.

Tras ordenar de forma ascendente las  $J$  medias por su tamaño, se efectúan todas las comparaciones posibles entre pares de medias teniendo en cuenta el número de escalones ( $r$ ) que las separan: con  $J$  medias, la media más pequeña y la más grande están separadas  $r = J$  escalones; la media más pequeña y la segunda más grande están separadas  $r = J - 1$  escalones; la media más pequeña y la tercera más grande están separadas  $r = J - 2$  escalones; etc.

Dos medias adyacentes tras la ordenación están separadas por dos escalones. El número de escalones existente entre las medias comparadas condiciona el nivel de significación de cada comparación, siendo este mayor cuanto más alejadas se encuentran las medias después de ser ordenadas. En el método REGWF, cada comparación se evalúa utilizando un estadístico  $F$  y un nivel de significación  $\alpha_c = 1 - (1 - \alpha)^{r/J}$ .

Observaciones (Mendiburu, 2015):

Es un método por pasos más potente que Duncan o Rangos Múltiples de Duncan y Student-Newman-Keuls (SNK) o Método de Keul, pero no es apropiado cuando los grupos tienen tamaños distintos.

### 3.3.4. Tukey, diferencia significativa honesta ó honestly-significant-difference (HSD)

Procedimiento similar a la Diferencia Mínima Significativa, DMS, LSD,  $t$  de Fisher ó Least Significant Difference, pues se refiere a que es necesario un solo

valor para determinar la significación de las diferencias. Es una prueba de gran adaptabilidad y superior al DMS, pues la unidad considerada es el experimento.

Esta prueba consiste en estimar un valor  $D$  ( $s\bar{X} * Factor Q$ ). Esta prueba se usa para hacer todas las comparaciones múltiples posibles con  $t$  tratamientos y es válida cuando las repeticiones están completas. Este valor se toma de tabla de Prueba de Tukey a 5 o 1 % de probabilidades,  $gl$  de error y número de tratamientos involucrados:

$$DMS = Q_{(\alpha, t, gl\ error)} * s\bar{X} \left( \sqrt{\frac{S_{(o\ CME_E)}^2}{r}} \right)$$

El método consiste en encontrar todas las comparaciones posibles con  $t$  tratamientos ( $t \binom{t-1}{2}$ ), al poner las medias en orden creciente o decreciente y restar de la media mayor todas las demás medias y así sucesivamente. Si estas diferencias de medias son mayores que las DMS se dice que las medias son significativas, caso contrario no lo son. Es decir, si dos medias que comparten la misma letra o color no difieren estadísticamente o no tienen diferencias significativas entre ellas.

Observaciones (Mendibiru, 2015):

- Se le considera como Prueba Honesta de mayor exigencia que todas las pruebas de significación, excepto Scheffé.
- Es recomendable para procesos investigativos con mayor o igual a 3 medias de tratamientos y detectando al menos significativa F de Fisher.
- Su implementación es igual a Diferencia Mínima Significativa, DMS, LSD,  $t$  de Fisher ó Least Significant Difference.

Los valores se buscan en SNK o Tukey.

### 3.3.5. Waller-Duncan's Bayesian k-ratio t-test ó Diferencia Mínima Significativa de Bayes

En 1975 Duncan continuó el proceso múltiple de comparación e introdujo el criterio de minimización de errores experimentales. Para lograr esto, Duncan usó el Teorema de Bayes obteniendo una prueba llamada Waller-Duncan y, en conse-

cuencia, es una prueba de comparaciones múltiples basada en un estadístico  $t$  que utiliza la aproximación Bayesiana.

Su enfoque sugiere al experimentador a reflexionar sobre los "costos" asociados a la fabricación de varios tipos de errores estadísticos y además requiere que el experimentador seleccione un valor de  $k$ . Duncan (1965) afirma que los valores de  $k$  proporciones igual a 500, 100 y 50 son más o menos comparables a los niveles de significación de  $\alpha = 0,01$ ; 0,05 y 0,10, respectivamente. Mientras que Carmer (1976) indica que proporciones de  $k$  la igualan a 20, y 2 corresponden a niveles de significación de  $\alpha = 0,20$ ; 0,40 y 0,80, respectivamente.

El desarrollo teórico del procedimiento por Waller y Duncan (1974) incluye el uso de principios estadísticos bayesianos en examen de probabilidades previas de errores de decisión. Debido a sus propiedades de Bayesiano y sus semejanzas a la diferencia menos significativa, el procedimiento a menudo se conoce como la diferencia menos significativa de Bayes.

Para las comparaciones de pares el valor crítico para la diferencia menos significativa de Bayes es:

$$BLSD = t(k, F, f, q) S_d$$

Donde

*BLSD*: Bayes Least Significant Difference

$t(k, F, f, q)$ : es el valor tabulado del mínimo riesgo medio para la relación,

$k$ : selecciona el valor numérico de la proporción computada y los grados de libertad,

$f$  y  $q$ : el error y los tratamientos, respectivamente.

Observaciones (Garmer y Walker, 1985):

- La diferencia crítica es un único valor del producto del error estándar de diferencia entre dos medias de tratamiento y una cantidad llamada valor de  $t$  de riesgo promedio mínimo.
- Este valor  $t$  se diferencia de *t de Student*, pero depende en cambio de la magnitud del valor del análisis de varianza  $F$  calculado para probar los efectos del tratamiento general y la relación particular de  $k$  seleccionado, así como sobre el tratamiento y error de grados de libertad.

- Se dan tablas de valores de riesgo promedio mínimo  $t$  de  $k$  proporciones igual a 500, 100 y 50 en Waller y Duncan (1969). Waller y Kemp (1975) describen un programa de computadora que calcula el valor de  $t$  de riesgo promedio mínimo para una combinación específica de  $k, F, f$  y  $q$ .

Quizá la diferencia más esencial entre el LSD ordinario y el BLSO es que con el primer procedimiento, el experimentador selecciona el nivel de significación en que probar las diferencias de tratamiento, mientras con BLSO los datos observados deben tener una gran influencia en tasa de error para realizar una sabia comparación.

### 3.3.6. Scheffé o minimum significant difference (MSD)

Scheffé (1953) propuso un método para realizar cualquier contraste entre medias de tratamientos. Dicho procedimiento no requiere que el modelo sea equilibrado. El método de Scheffé está basado en la construcción de intervalos de confianza para todos los posibles contrastes de la forma  $H_0: C = 0$  vs  $H_a: C \neq 0$ . Estos intervalos tienen un nivel de confianza simultáneo  $1 - \alpha$ ; es decir, la probabilidad de que todos los intervalos sean correctos simultáneamente es igual a  $1 - \alpha$ . Scheffé demostró que dichos intervalos de confianza tienen la siguiente expresión:

$$\hat{c} = \pm S\{\hat{C}\} \sqrt{(1 - \alpha)F_{\alpha;1-1;N-1}}$$

$\hat{C}$ : Estimador insesgado de  $C$

$S\{\hat{C}\}$ : Estimador de desviación típica del contraste

Se le considera la prueba más estricta que las anteriores y es más fácil su aplicación, pues se usan los valores de la Tabla  $F$ . El valor omega ( $\omega$ ) calculado para comparar medias de tratamientos está dado por:

$$\omega_{(val./comp. de \bar{X}_i)} = \sqrt{F_{(\alpha, gl\ numerador, gl\ denominador)}(t - 1)S_{(CME_E)}^2 \left[ \frac{C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 (\text{Coeficientes de contrastes})}{r \Gamma(\text{Repeticiones})} \right]}$$

O equivalente a:

$$S = (F_{\alpha}) (S_a)$$

Donde:

$$F_o = \sqrt{F_{(\alpha, \text{gl numerador, gl del denominador o error})}(t - 1)} \text{ y } S_a = \sqrt{\frac{2S_{(CME_E)}^2}{\Gamma(\text{Repeticiones})}}$$

Observaciones (Mendibiru, 2010):

Es la más exigente respecto a todas las pruebas sólo al 5 %.

## CAPÍTULO IV

### 4. FACTORES CUANTITATIVOS

#### 4.1. CONTRASTES ORTOGONALES

De acuerdo con Padrón (2006) y Monar (2017), Contrastes Ortogonales es la prueba de comparación de medias de tratamientos que registra un sólo grado de libertad debido a que representa un contraste con un grado de libertad y, a diferencia de pruebas con Factores Cualitativos, en análisis de comparaciones se usan totales de tratamientos en vez de medias, pues ahorra y evita errores por redondeo de cifras e incluye todos los datos en vez de un valor medio que puede ser sesgado en el cálculo.

En la tabla 9 se presentan los Coeficientes y grados del polinomio para Comparaciones Ortogonales:

Tabla 9 Contrastes ortogonales

Número de niveles del factor	Grado del Polinomio	Totales de niveles del factor en estudio					
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\sum c_i^2$
2	1	-1	+1				2
3	1	-1	0	+1			2
	2	+1	-2	+1		6	
4	1	-3	-1	+1	+3	20	
	2	+1	-1	-1	+1	4	
	3	-1	+3	-3	+1	20	
5	1	-2	-1	0	+1	+2	10
	2	+2	-1	-2	-1	+2	14
	3	-1	+2	0	-2	+1	10
	4	+1	-4	+6	-4	+1	10

Es importante mencionar que en la Prueba de Contrastes Ortogonales los Coeficientes, grados del polinomio, símbolos, cantidades simbólicas de comparaciones positivas (+) y/o negativas (-) pueden cambiar sin influir en el resultado.

Por ejemplo +3 -1 -1 -1 ó -3 +1 +1 +1, +6 -2 -2 -2 ó -6 +2 +2 +2, +12 -4 -4 -4 ó -12 +4 +4 +4, +18 -6 -6 -6 ó -18 +6 +6 +6 etcétera. Con base en la experiencia del investigador, la Prueba de Contrastes Ortogonales será previamente conocida, planificada y orientada en conocer la diferencia de medias de tratamientos de interés específico.

En la tabla 10, se muestra un ejemplo de su estimación en Diseño Experimental de Parcela Sub-Sub Dividida o Doblemente Dividida con Bloques Completos al Azar (PSSD-DBCA) con dos niveles de factores A, B y tres de C:

Tabla 10 Método interpretativo

Comparación	Variedades de Linaza (Linum usitatissimum)			Comparaciones					
	Var 1	Var 2	Var 3	C <sub>i</sub> ó Factor Q	C <sub>i</sub> <sup>2</sup> ó Factor Q <sub>i</sub> <sup>2</sup>	∑ <sub>i=1</sub> <sup>n=k</sup> P <sub>i</sub> = 0	∑ <sub>i=1</sub> <sup>n=k</sup> P <sub>i</sub> <sup>2</sup> = 0	∑ <sub>i=1</sub> <sup>n=k</sup> r * Q	SC <sub>i</sub> = C <sub>i</sub> <sup>2</sup> ó Factor Q <sub>i</sub> <sup>2</sup> = ∑ <sub>i=1</sub> <sup>n=k</sup> r * Q
	∑ Var 1	∑ Var 2	∑ Var 3						
$\bar{V}_1$ vs $\bar{V}_2$ vs $\bar{V}_3$	-2	+1	+1	$C_1 \text{ ó } Q_1 = \left( \sum \text{Var 1} - \sum \text{Var 2} \right) + \left( \sum \text{Var 1} - \sum \text{Var 2} \right) + \left( -2 * \sum \text{Var 1} \right) + \left( +1 * \sum \text{Var 2} \right) + \left( +1 * \sum \text{Var 3} \right)$	$C_1^2 \text{ ó } Q_1^2 = \left( \sum \text{Var 1} - \sum \text{Var 2} \right)^2 + \left( \sum \text{Var 1} - \sum \text{Var 2} \right)^2 + \left( -2 * \sum \text{Var 1} \right)^2 + \left( +1 * \sum \text{Var 2} \right)^2 + \left( +1 * \sum \text{Var 3} \right)^2$	-2 + 1 + 1 = 0	(-2) <sup>2</sup> + (+1) <sup>2</sup> + (+1) <sup>2</sup> = 6	∑ <sub>i=1</sub> <sup>n=4</sup> P <sub>i</sub> <sup>2</sup> * rab	$\frac{C_1^2 \text{ ó Factor } Q_1^2}{\sum_{i=1}^{n=4} r * Q}$
$\bar{V}_2$ vs $\bar{V}_3$	0	-1	+1	$C_2 \text{ ó } Q_2 = \left( \sum \text{Var 2} - \sum \text{Var 3} \right) + \left( 0 * \sum \text{Var 1} \right) + \left( -1 * \sum \text{Var 2} \right) + \left( +1 * \sum \text{Var 3} \right)$	$C_2^2 \text{ ó } Q_2^2 = \left( \sum \text{Var 2} - \sum \text{Var 3} \right)^2 + \left( 0 * \sum \text{Var 1} \right)^2 + \left( -1 * \sum \text{Var 2} \right)^2 + \left( +1 * \sum \text{Var 3} \right)^2$	0 - 1 + 1 = 0	(0) <sup>2</sup> + (-1) <sup>2</sup> + (+1) <sup>2</sup> = 2	∑ <sub>i=1</sub> <sup>n=4</sup> P <sub>i</sub> <sup>2</sup> * rab	$\frac{C_2^2 \text{ ó Factor } Q_2^2}{\sum_{i=2}^{n=4} r * Q}$

Fuente: Elaboración propia con base en modificaciones de González, B. G. (2010) y Hurtado, M. J. & Gómez, F. R. (2010). Nota: r = Número de repeticiones, a = Niveles de Factor A y B = Niveles de Factor B.

Los métodos de estimación opcionales Q<sub>i</sub> con símbolo positivo (+) o C<sub>i</sub>\* ∑ Vari, con símbolo negativo (-), para el cálculo C<sub>i</sub> ó Factor Q no se lo considera importante, pues la estimación de C<sub>i</sub><sup>2</sup> ó Factor Q<sub>i</sub><sup>2</sup> transforma en valor positivo (+) cualquiera de ambas opciones.

Sin embargo, existen algunas Reglas de Contraste:

- I. Cualquier función de la forma  $P_1 T_1 + P_2 T_2 + \dots + P_k T_k = C_i$  se llama contraste si  $\sum_{i=1}^{n=k} P_i = 0$ ; es decir, si la suma de coeficientes es igual a 0.

Por ejemplo:  $-3+1+1+1 = 0$ ;  $0-2+1+1 = 0$ ;  $0+0-1+1=0$ , etcétera.

Entonces si  $C_1 = T_1 - T_3 (+1-1) = 0$  ó  $C_2 = T_1 + T_3 - 2T_2 (+1+1-2) = 0$  tal que  $C_1$  y  $C_2$  son contrastes.

- II. Si  $C$  es un posible contraste. El  $C_i$  -Coeficiente es establecido por el investigador en función de comparaciones ortogonales que se hayan establecido-son los mínimos números enteros que sumados algebraicamente dan 0.

$$C_1 = (V_1 - V_2) + (V_1 - V_3) + (V_1 - V_4), C_2 = (V_2 - V_3) + (V_2 - V_4) \text{ y}$$

$$C_3 = (V_3 - V_4) \text{ ó } Q_i = \sum T_i (\text{Total/Tratamiento}) * C_i (\text{Coeficiente: } -3, +1).$$

- III. Si  $C$  es un posible contraste, la cantidad  $SC_i = \frac{C_i^2 \text{ ó Factor } Q_i^2}{\sum_{i=1}^{n=4} r * Q}$  es una componente de suma de cuadrados de tratamientos y representa un contraste con un grado de libertad.

- IV.  $\sum_{i=1}^{n=k} r * Q$ ,  $r^*$  niveles de factor implica elementos faltantes o que no son estudiados -Factor A por ejemplo- y existen otros casos simples en que sólo se considera  $r$ .

Por ejemplo: un DBCA con sólo cinco variedades de maíz con cuatro repeticiones.

La comparación de medias de tratamientos se interpreta como cualquier ANOVA normal, tomando en cuenta sus seis criterios de lectura.

### 4.1.1. Superficie de respuesta

Es el experimento planeado para detectar cómo responden los niveles de un factor cuando se comparan con varios niveles de otro factor. Su metodología es un conjunto de técnicas matemático-estadísticas utilizadas para modelar y analizar problemas en que una variable de interés, dependiente o endógena es influenciada por otras, independientes o exógenas. Su objetivo es optimizar la variable de interés que se logra al determinar las condiciones óptimas de operación del sistema.



**Por ejemplo:** aplicar varias dosis de un fungicida en diferentes niveles de humedad ambiental en un invernadero o usar niveles de nitrógeno en dosis de fósforo.

En estos experimentos el investigador busca el punto máximo de respuesta al factor estudiado, pues en general, el tipo de respuesta en experimentación no es Modelo Lineal a pesar que las respuestas de mayor interés son la lineal, cuadrática y/o cúbica, sino curvilínea empleando Modelos Cuadrático, Cúbico, Potencial, Exponencial, Logarítmico, Inverso, Sigmoidal, etcétera o usando transformación Box-Cox.

En esta situación es posible aplicar el análisis de regresión. Sin embargo, cuando el incremento o intervalo entre niveles de un factor son iguales se puede hacer análisis de datos en forma más sencilla mediante Coeficientes de Polinomios Ortogonales.

Si sólo la respuesta lineal es significativa se deduce que su respuesta a varios niveles de un factor es constante; es decir, de cada incremento del factor se obtiene un aumento adicional en otro factor. La respuesta puede ser positiva o negativa, según aumente o disminuya la respuesta del segundo factor en relación con el primero. Si la función cuadrática es significativa, la respuesta del segundo no es constante; es decir, los datos se ajustan a una parábola.

### 4.2. FUNCIÓN DE RESPUESTA PREDICHA

Respuesta es una cantidad medible, cuyo valor se afecta por el cambio de niveles de factores, entendidos como condiciones cuantitativas o cualitativas del proceso que influyen la variable de respuesta, dependiente o endógena. Al mencionar que un valor de respuesta  $Y$  depende de niveles de variables independientes o exógenas ( $X: X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k$ ) de  $K$  factores ( $\varepsilon: \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_k$ ) se entiende que existe una función matemática de  $X: X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k$ , cuyo valor para combinación de niveles de factores corresponde a  $Y = f(X: X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k)$ .

La función de respuesta se puede presentar con una ecuación polinomial. El éxito de una investigación de superficie de respuesta depende que se pueda ajustar a un polinomio de primer o segundo grado. Por ejemplo: suponga que la función de respuesta para niveles de dos factores puede expresarse usando el polinomio de primer grado  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$  tal que  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  son coeficientes de regresión a estimar,  $X_1$  y  $X_2$  representan niveles de  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , respectivamente.

Suponga que se recolectan  $N \geq 3$  valores respuesta ( $Y$ ), con estimadores  $b_0, b_1$  y  $b_2$ , se obtienen  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ , respectivamente. Al sustituir coeficientes de regresión por estimadores se obtiene la ecuación estimada  $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$ .

### 4.3. MÉTODO GRÁFICO

#### 4.3.1. Dominio y su representación grafica

Sea una función:

$$y = f(x) \Rightarrow y (R_f) = f(x)(D_f),$$

tal que el Dominio de una Función ( $D_f$ ) es el conjunto de valores que toma  $X$  en la función ó Dominio de Función (variable explicativa, independiente o exógena), mientras que Rango de una Función ( $R_f$ ) es el conjunto de valores que toma  $Y$  en  $F_x$  ó  $D_f$  (variable explicada, dependiente o endógena).

La tabla 11 muestra ejemplos del cálculo o estimación de Dominio de Funciones Polinómicas:

Tabla 11 Cálculo o estimación de Dominio de Funciones Polinómicas

Cálculo o estimación de Dominio de Funciones Polinómicas			
Función	Ecuación matemática	Estimación de Dominio	Observaciones
Primer grado	$f(x) = 3x - 7$	$D_f: X \in \mathbb{R}$	En cualquier de estos casos el conjunto de Dominio sería el conjunto de números reales, representado por $\mathbb{R}$ , pues la variable explicativa, independiente, exógena puede tomar cualquier valor del conjunto de números reales.
Cuadrática	$g(t) = 4t^2 - t + 1$	$D_g: t \in \mathbb{R}$	
Quinto grado	$r(u) = u^2 - 3u^5 + 10$	$D_r: u \in \mathbb{R}$	
Cálculo o estimación de Dominio de Funciones Racionales			
Racional (fracción o cocientes de expresiones)	$h(x) = \frac{x - 6}{x - 5}$	$D_h: x \in \mathbb{R} - \{5\}$ o $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$	Es importante cuidar que su denominador no sea = 0; es decir, $x - 5 \neq 0$ , pues sería una función indeterminada. Entonces, si $x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$ . Por lo tanto, el dominio de la función $h$ son las $x$ pertenecientes al conjunto de los reales ( $\mathbb{R}$ ), exceptuando elemento 5 ( $-\{5\}$ ).
	$l(m) = \frac{x - 1}{2x + 3}$	$D_l: m \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ o $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$	Es importante cuidar que su denominador no sea = 0; es decir, $2x + 3 \neq 0$ , pues sería una función indeterminada. Entonces, si $2x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2}$ . Por lo tanto, el dominio de la función $l$ son las $m$ pertenecientes al conjunto de

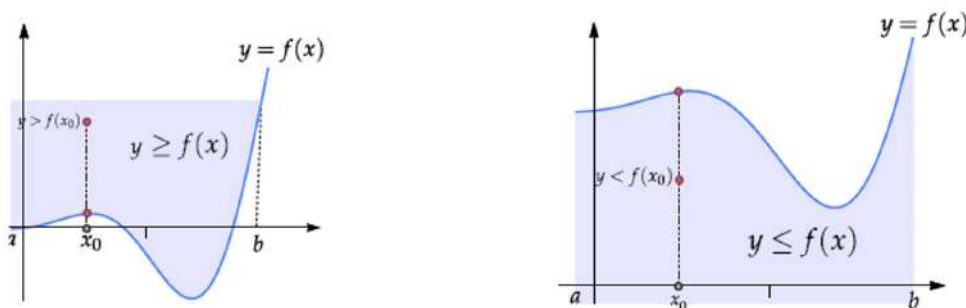
Cálculo o estimación de Dominio de Funciones Polinómicas			
Función	Ecuación matemática	Estimación de Dominio	Observaciones
			los reales ( $\mathbb{R}$ ), exceptuando elemento $-\frac{3}{2}$ ( $-\{-\frac{3}{2}\}$ ).
	$y = f(x) = \frac{x+3}{x-2}$	$D_f: x \in \mathbb{R} - \{2\}$ o $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$	<p>Es importante cuidar que su denominador no sea = 0; es decir, <math>x - 2 \neq 0</math>, pues sería una función indeterminada. Entonces, si <math>x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2</math>. Por lo tanto, el dominio de la función y son las x pertenecientes al conjunto de los reales (<math>\mathbb{R}</math>), exceptuando elemento 2 (<math>-\{2\}</math>). Si a la función y se le dieran valores tanto por la izquierda (<math>\frac{1.99+3}{1.99-2} = -499</math>) como por la derecha de 2 (<math>\frac{2.01+3}{2.01-2} = 501</math>) implica que si x tiende a 2 por la izquierda (<math>x \rightarrow 2^-</math>) <math>\Rightarrow</math> y tiende a menos infinito (<math>y \rightarrow -\infty</math>), pero si x tiende a 2 por la derecha (<math>x \rightarrow 2^+</math>) <math>\Rightarrow</math> y tiende a más infinito (<math>y \rightarrow +\infty</math>), se presentaría una asíntota vertical (recta a la que se aproxima, pero sin haber contacto) en 2, siendo su asíntota horizontal en azul (<math>y = \frac{1x+3}{1x-2} = \frac{1}{1} = 1</math>):</p>
	$R(n) = \frac{n+1}{n^2-6n+8}$	$D_h: x \in \mathbb{R} - \{2; 4\}$ o $(-\infty, 2) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$	Es importante cuidar que su denominador no sea = 0; es decir, $n^2 - 6n + 8 \neq 0$ , pues sería una función indeterminada. Entonces, si se factoriza su denominador sería $(n - 4)(n - 2) \neq 0 \Rightarrow n - 4 \neq 0$ y $n - 2 \neq 0 \therefore n \neq 4$ y $n \neq 2$ . Por lo tanto, el dominio de la función R son n pertenecientes al conjunto de los reales ( $\mathbb{R}$ ), exceptuando elementos 2 y 4 ( $\{2; 4\}$ ).
	$Q(L) = \frac{L-2}{L^2+1}$	$D_Q: L \in \mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$	Es importante cuidar que su denominador no sea = 0; es decir, $L^2 + 1 \neq 0$ , pues sería una función indeterminada. Sin embargo, al ser cuadrado será una expresión positiva sin importan que valor tome L aunque sumando el valor 1 sería más positiva. Por lo tanto, su denominador jamás será = 0.
Cálculo o estimación de Dominio de Funciones con Raíces			

Cálculo o estimación de Dominio de Funciones Polinómicas			
Función	Ecuación matemática	Estimación de Dominio	Observaciones
Radical par	$Z(v) = \sqrt[4]{v-9}$	$D_Z: v \in [9, \infty)$ o $(-\infty, +\infty)$	Si se tiene un radical –símbolo que indica que es una raíz cuadrada- par se debe garantizar que el radicando –número del que se obtiene la raíz cuadrada- no sea negativo. Entonces, $v - 9 \geq 0 \Rightarrow v \geq 9$ .
	$M(Y) = \frac{Y+10}{\sqrt{Y-1}}$	$D_M: Y \in (1, \infty)$	El radicando debe ser positiva, pero como es el denominador de la expresión será $> 0 \Rightarrow Y - 1 > 0, \therefore Y > 1$ .
	$W(X) = \sqrt{X^2 + 25}$	$D_W: X \in \mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$	Es importante garantizar que radicando $X^2 + 25 \geq 0$ ; aunque, analizándolo $X^2$ será+, con mayor razón sumándole 25, por lo que jamás será un valor negativo.
Radical impar	$A(t) = \sqrt[3]{t-4}$	$D_A: t \in \mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$	No hay problema si el radicando es negativo, pues radicales impares admiten radicandos negativos.
	$C(B) = \frac{B-3}{\sqrt[5]{B-2}}$	$D_C: B \in \mathbb{R} - \{2\}$ o $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$	Hay que garantizar que radicando $B - 2$ no sea 0, no importando que sea negativo. Es decir, $B - 2 \neq 0 \Rightarrow B \neq 2$ . Por lo tanto, el dominio de función C son los B pertenecientes a los reales ( $\mathbb{R}$ ), exceptuando elemento 2 ( $-\{2\}$ ).

Fuente: Elaboración propia con base en modificaciones de cursos de Diseño Experimental con Mat. Luis Ramón Guasgua Amaguaña Ph. D.

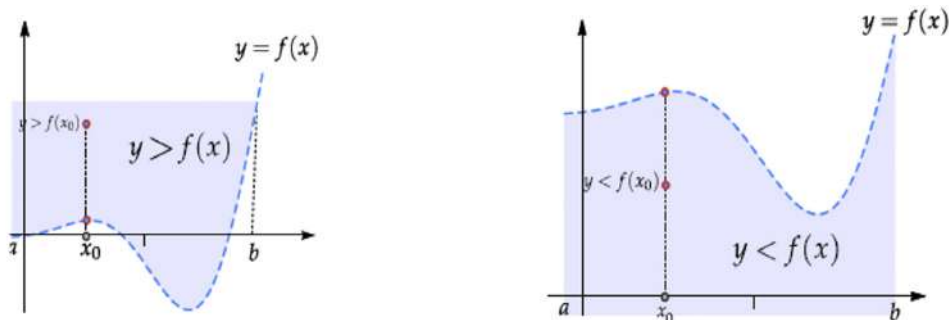
Como en funciones de una variable, el dominio máximo de  $f$  es el conjunto de puntos  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $z=f(x,y)$  o  $F(x,y,z) = 0$  esté bien definida. Su representación gráfica en regiones definidas por desigualdades está dada por cualquier combinación de ecuaciones y desigualdades que pueden definir una región, de manera implícita. Los casos sencillos son:

- Desigualdades tipo  $y \geq f(x)$  o  $y \leq f(x)$  en intervalo  $[a,b]$  que consiste en representar pares  $(x,y)$  con  $y=f(x)$  tal que los puntos  $(x,y)$  con  $y \geq f(x)$  confirman una región por encima de la representación gráfica  $f$ , incluyéndola y, de manera análoga, puntos  $(x,y)$  con  $y \leq f(x)$  conforman una región por debajo de la representación gráfica de  $f$ , incluyéndola.



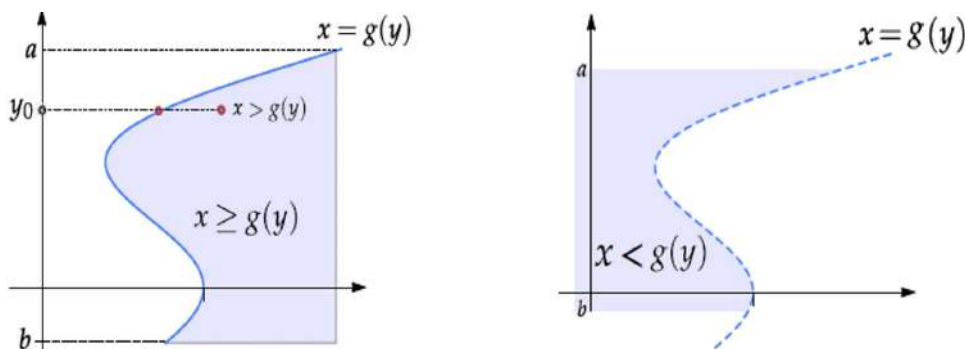
Fuente: Mora, F. W. (2016)

- Desigualdades tipo  $y > f(x)$  o  $y < f(x)$  en intervalo  $[a,b]$  que consiste en representar pares  $(x,y)$  con  $y=f(x)$  tal que los puntos  $(x,y)$  con  $y \geq f(x)$  confirman una región por encima de la representación gráfica  $f$ , no incluyéndola y, de manera análoga, puntos  $(x,y)$  con  $y \leq f(x)$  conforman una región por debajo de la representación gráfica de  $f$ , no incluyéndola.



Fuente: Mora, F. W. (2016)

- Desigualdades tipo  $x \geq g(y)$  o  $x < g(y)$  en intervalo  $[a,b]$  que consiste en representar pares  $(x,y)$  con  $x=g(x)$  tal que los puntos  $(x,y)$  con  $y \geq g(x)$  confirman una región a la derecha de la representación gráfica de  $g$ , incluyéndola y, de manera análoga, los puntos  $(x,y)$  con  $y \leq g(x)$  conforman la región  $z$  la izquierda de la representación gráfica de  $g$ , incluyéndola. Aunque, la región no incluye la curva cuando la desigualdad es estricta.

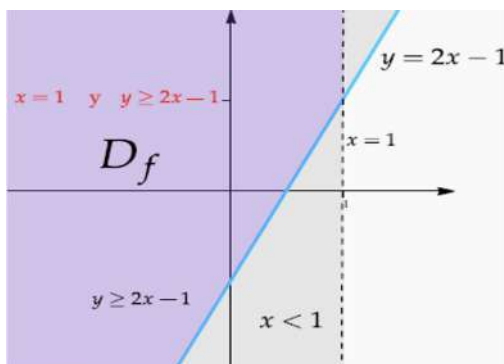


Fuente: Mora, F. W. (2016)

#### Ejercicio 4.1.

Determine y realice la representación gráfica del dominio de función  $z = \sqrt{3y-6x+3} + \ln(1-x)+1$ . Entonces,  $3y-6x+3 \geq 0 \Rightarrow y = \frac{6x-3}{3} = 2x-1$  y  $1-x > 0$ .

Por lo tanto,  $D_f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y \geq 2x-1 \text{ y } x < 1\}$ , el dominio de  $f$  es la intersección de la región  $y \geq 2x-1$  (región por encima de la recta  $y= 2x-1$ , incluida) y la región  $x < 1$  (región a izquierda de recta  $x=1$ , no incluida).



Fuente: Mora, F. W. (2016)

#### 4.4. SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN

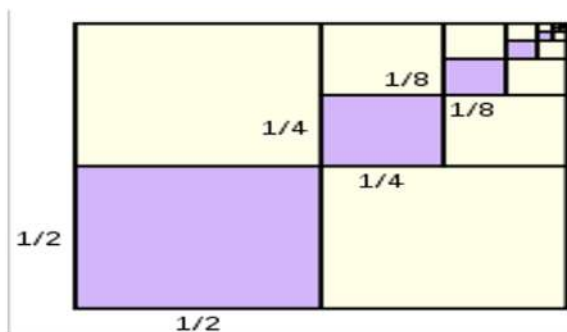
Serie de Taylor. Fue creada por el matemático británico Brook Taylor, Edmonton, Middlesex, Inglaterra, 18 de agosto de 1685 - Somerset House, Londres, 29 de diciembre de 1731.

En matemáticas, una serie de Taylor es una aproximación de funciones, entendida magnitud o cantidad es función de otra si el valor de la primera depende del valor de la segunda, como el área  $A$  de un círculo es función de su radio  $r$ , tal que el valor del área es proporcional al cuadrado del radio ( $A = \pi * r^2$ ) o duración  $T$  de un viaje en tren entre dos ciudades separadas por una distancia  $d$  de 150 km depende de la velocidad  $v$  a que se desplace el tren, tal que la duración es inversamente proporcional a la velocidad,  $(d/v)$  explicando que  $A$  es la primera magnitud (área o duración) se la denomina variable dependiente y la cantidad de la que depende (radio o velocidad) es la variable independiente, mediante una serie de potencias, entendida como una serie de forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1(x - c)^1 + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + a_4(x - c)^4 + \dots + a_n(x - c)^n$  alrededor de  $c = x$  tal que  $C$  es centro y  $a_n$  sus coeficientes, entendidos como términos de una sucesión que usualmente corresponde con la serie de Taylor de alguna función conocida aunque si, en ocasiones, el centro  $C = 0$  la serie se denomina de MacLaurin, o suma de potencias enteras de polinomios como  $(x - a)^n$ .

Algunos ejemplos de la serie de Taylor son:

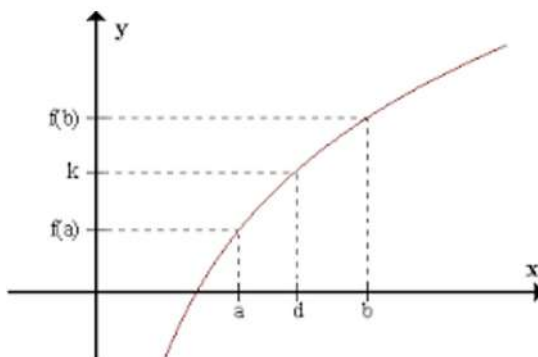
- **Serie Geométrica.** Es serie en que la razón entre sus términos sucesivos permanece constante.

Por ejemplo:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$  se dice que es geométrica debido a que cada término sucesivo se obtiene de multiplicar el anterior valor por  $\frac{1}{2}$  o cuando cada uno de los cuadrados púrpuras tiene  $\frac{1}{4}$  del área del cuadrado anterior más grande ( $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ ) tal que la suma de áreas de cuadrados púrpuras es  $\frac{1}{3}$  del área del cuadrado grande.



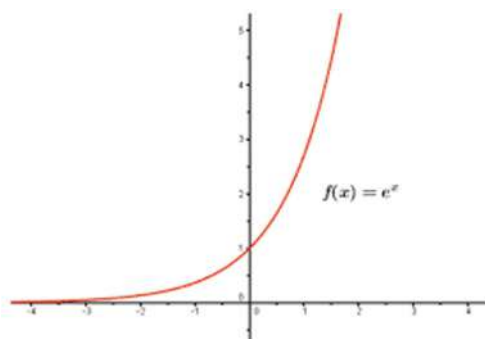
Fuente: Mora, F. W. (2016)

La serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x}$  es una serie de potencias, absolutamente convergente si  $|x| < 1$  y divergente si  $|x| \geq 1$ .



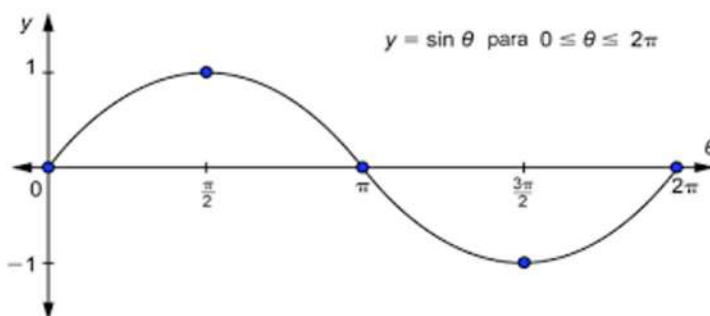
Fuente: Zill, D. G. y Wright, W. S. (2011)

- **Serie Exponencial.** Donde  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ .



Fuente: Zill, D. G. y Wright, W. S. (2011)

- **Serie Seno.** Tal que  $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ .



Fuente: Zill, D. G. y Wright, W. S. (2011)

La representación matemática formal de serie de Taylor es:

$$f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n)$$

$$f(x) \approx \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{2!} + \frac{f'''(a)}{3!} + \frac{f^{IV}(a)}{4!} + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}$$

$$f(x) \approx \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)' + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)'' + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)''' + \frac{f^{IV}(a)}{4!}(x-a)'''' + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Donde,  $n!$  es factorial de  $n$  y  $f^n(a)$  denota  $n$ -ésima derivada de  $f$  para el valor  $a$  de variable respecto de la que se deriva.



Serie de MacLaurin ó Serie Taylor alrededor de 0. Fue creada por el matemático escocés Colin MacLaurin, Kilmodan, Febrero de 1698 - Edimburgo, 14 de Junio de 1746. En matemáticas, una serie de Taylor que está centrada sobre el punto cero,  $a = 0$ , es llamada Serie de McLaurin o, en otras palabras, es derivada de orden cero de  $f$  como la propia  $f$  y tanto  $(x - a)^0$  como  $0!$  Son definidos como  $1(0! = 1)$  aunque en caso que  $a = 0$  la serie es denominada McLaurin. Presenta las siguientes ventajas:

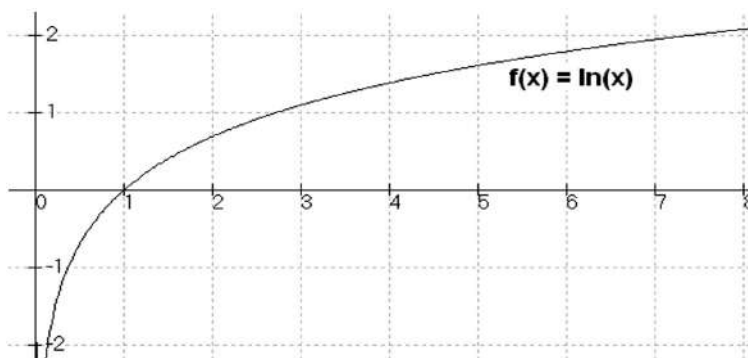
- La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales.
- Se puede utilizar para calcular valores aproximados de funciones.
- Es posible calcular la optimidad de la aproximación.

Algunos ejemplos de la serie de MacLaurin son:

- Logaritmo natural. Donde  $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ . En matemáticas, se denomina logaritmo natural o informalmente logaritmo neperiano al logaritmo cuya base es el número  $e$ , un número irracional cuyo valor aproximado es 2,7182818284590452353602874713527.
- El logaritmo natural se suele denominar como  $\ln(x)$  o a veces como  $\log_e(x)$  e incluso en algunos contextos  $\log(x)$ , pues ese número cumple la propiedad que el logaritmo vale 1.

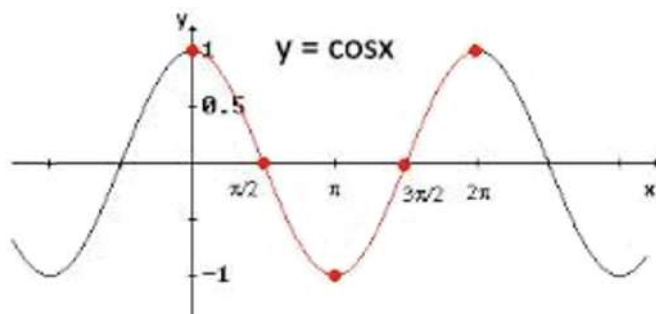
El logaritmo natural de un número  $x$  es entonces el exponente a al que debe ser elevado el número  $e$  para obtener  $x$ .

Por ejemplo, el logaritmo de 7,38905... es 2; pues  $e_2 = 7,38905$ . El logaritmo de  $e$  es 1 debido a que  $e^1 = e$ .



Fuente: Zill, D. G. y Wright, W. S. (2011)

- Función Coseno. Donde  $\text{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$



Fuente: Zill, D. G. y Wright, W. S. (2011)

La representación matemática formal de serie de MacLaurin es:

$$f(x) \approx \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} (x)^1 + \frac{f''(0)}{2!} (x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!} (x)^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!} (x)^4 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} (x)^n$$

Además de la obvia aplicación de utilizar funciones polinómicas en vez de funciones de mayor complejidad para analizar el comportamiento local de una función, las series de Taylor-MacLaurin tienen muchas otras aplicaciones.

Por ejemplo: análisis de límites, estudios paramétricos, estimación de números irracionales acotando su error, teorema de *L'Hopital* para la resolución de límites indeterminados, estudio de puntos estacionarios en funciones (máximos o mínimos relativos o puntos sillas de tendencia estrictamente creciente o decreciente), estimación de integrales, determinación de convergencia, suma de algunas series importantes, estudio de orden, parámetro principal de infinitésimos, estimación de puntos óptimos en Diseños Experimentales Diseño de Bloques Divididos *Alpha* Látices Simple, Bloques Divididos *Alpha* Látices Cuadrados usados en mejoramiento genético, etcétera.

#### Ejercicio 4.2.

$$Y = f(x) = \text{Cos } x \text{ con } x = 0$$

$$f(x) = \text{Cos } x \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\text{Sin } x \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\text{Cos } x \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \text{Sin } x \quad f'''(0) = 0$$

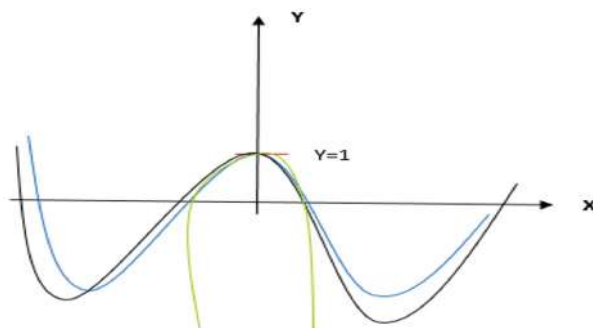
$$f^{IV}(x) = \text{Cos } x \quad f^{IV}(0) = 1$$

$$f(x) \approx \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}(x)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}(x)^4 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n$$

$$f(x) \approx \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}(x)^1 + \frac{f''(-1)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \frac{f^{IV}(1)}{4!}(x)^4 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n$$

$$f(x) \approx 1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} - \frac{(x)^6}{6!} + \frac{(x)^8}{8!} = \frac{(x)^n}{n!}$$

La representación gráfica de la convergencia de sus diferentes funciones sería:



Fuente: Elaboración propia usando Matlab con base en Zill, D. G. y Wright, W. S. (2011)

## 4.5. FUNCIONES ESCALARES DE DOS VARIABLES O VECTORES $\mathbb{R}^2$

Una función escalar de dos variables  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  asignada a cada par  $(x,y) \in D$ , un único número real denotado con  $f(x,y) = z$ . El grafico de  $f$  es el conjunto  $\{(x,y,z): x,y \in D \text{ y } z = f(x,y)\}$ . El criterio (formula) que define a  $f$  puede ser explícito o implícito (ver tabla 12).

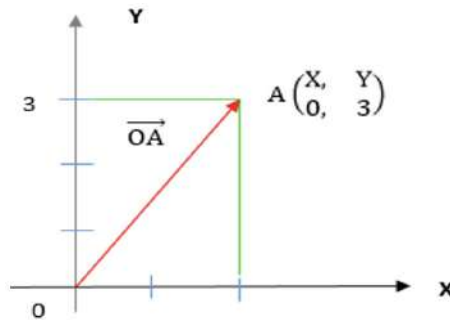
Tabla 12 Función de dos variables

Función de dos variables	
Forma Explícita	Forma Implícita
$z = x^2 + y^2$	$F(x, y, z) = 0$
$f(x, y) = x^2 + y^2$	$\underbrace{F(x, y, z)}_{x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0}; z \geq 0$

Paralelamente, existen magnitudes que quedan determinadas dando un solo número real, como longitud de regla, masa de un cuerpo, tiempo transcurrido entre dos sucesos, densidad, volumen, trabajo, potencia, aceleración, cantidad de movimiento, campo magnético, flujo de calor o materia, etcétera. Tales magnitu-

des se llaman escalares y pueden ser representadas sobre la recta real mediante un número que indica su medida.

En otras magnitudes no es suficiente dar un número para determinarlas, sino que para conocer la magnitud o modulo -vector medida- en un punto, entendido como número que coincide con la "longitud" del vector en la representación gráfica o distancia euclidea, se requiere conocer dirección, medida del ángulo que hace la línea recta por la que está dada y sentido, entendido como uno de los sentidos posibles sobre recta que para por el modulo o vector -magnitudes vectoriales-, con que el punto se mueve.

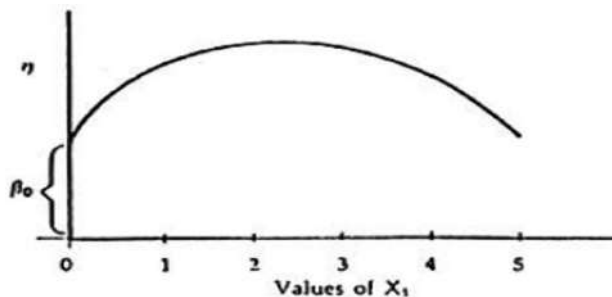


Fuente: Mora, F. W. (2019)

$\vec{OA}$  :distancia entre puntos inicial O y final A o longitud del segmento

Tal que,  $\vec{OA} = (A_x * \vec{i}) + (A_y * \vec{j}) \Rightarrow \vec{OA} = (2\vec{i}) + (3\vec{j})$ . Ahora bien, la relación  $Y=f(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k)$  entre  $Y$  y niveles de  $K$  factores ( $\varepsilon: \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_k$ ) representa una superficie. Con  $K$  factores, la superficie está en  $K+1$  dimensiones.

Por ejemplo: si se tiene  $Y=f(X_1)$ , la superficie está en dos dimensiones:



Fuente: Zill, D. G. y Wright, W. S. (2011)

Ejercicio 4.3.

$$y = f(x) = \ln(x) \text{ con } x = 1$$

$$f(x) = \ln(x) \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -1x^{-2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{IV}(x) = -6x^{-4} \quad f^{IV}(0) = -6$$

$$f(x) \approx \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{2!} + \frac{f'''(a)}{3!} + \frac{f^{IV}(a)}{4!} + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}$$

$$f(x) \approx \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)' + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)'' + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)''' + \frac{f^{IV}(a)}{4!}(x-a)'''' + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$


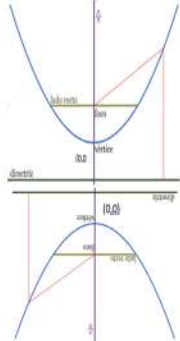
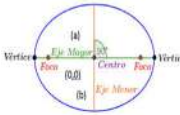
$$f(x) \approx 0 + 1(x-1)^1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-1)^n$$

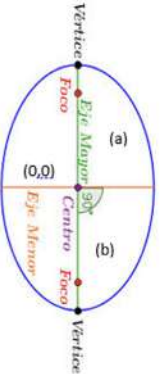
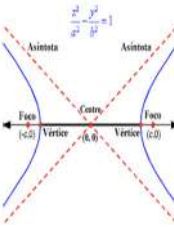
$$f(x) \approx (x-1)^1 - \frac{1(x-1)^2}{2 * 1} + \frac{2(x-1)^3}{3 * 2 * 1} - \frac{6(x-1)^4}{4 * 3 * 2 * 1} + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-1)^n$$

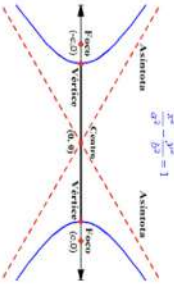
$$f(x) \approx \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-1)^n = \frac{(x-1)^n}{n!}$$

Las funciones tienen diferentes formas geométricas y se las presenta en la tabla 13:

Tabla 13 Formas geométricas

Nombre	Ecuación matemática	Equivalencia	Definición	Figura geométrica
Circunferencia	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	$x^2 + y^2 = r^2$ si $x$ y $y$ valen 0 el centro de circunferencia es un punto en el centro	Línea curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro situado en el mismo plano que se llama centro	
Parábola	$(y - k)^2 = (x - h)^2$	$y = x^2$ y $x = y^2$	Sección cónica de excentricidad igual a 1, resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al presentado por su generatriz. Cuando $y = x^2$ las líneas van hacia arriba (+), pero si $y = -x^2$ las líneas van hacia abajo (-).	
Elipse	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Curva cerrada con dos ejes de simetría que resulta al cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo al eje de simetría -con ángulo mayor que el de la generatriz respecto del eje de revolución. Si el denominador de $x^2 >$ al denominador de $y^2$ . Por ejemplo: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ , se dice que el eje mayor es sobre el eje X (elipse horizontal)	

Nombre	Ecuación matemática	Equivalencia	Definición	Figura geométrica
			<p>y si el denominador de <math>x^2 &lt;</math> al denominador de <math>y^2</math>.</p> <p>Por ejemplo:  <math>\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1</math>,                      se dice que el eje mayor es sobre el eje Y (elipse vertical).</p>	
Hipérbola	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	<p>Sección cónica, una curva abierta de dos ramas obtenida cortando un cono recto por un plano oblicuo al eje de simetría, y con ángulo menor que el de la generatriz respecto del eje de revolución. También, se considera el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a la distancia entre los vértices, la cual es una constante positiva. Si el denominador de <math>x^2 &gt;</math> al denominador de <math>y^2</math>.</p> <p>Por ejemplo  <math>\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1</math>,                      se dice que las hipérbolas son sobre el eje X (hipérbola horizontal)</p>	

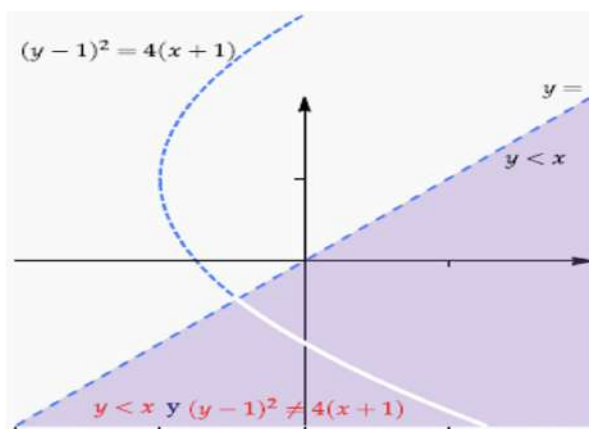
		<p>aunque si <math>x = y^2</math> la hipérbola estará sobre el lado positivo de eje X (+) en cambio si <math>x = -y^2</math> la hipérbola estará sobre el lado negativo del eje X (-), pero si el denominador de <math>x^2 &lt;</math> al denominador de <math>y^2</math>, por ejemplo <math>\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1</math>, se dice que las hipérbolas es sobre el eje Y hipérbola vertical).</p>	
--	--	--	---

Fuente: Elaboración propia con base en curso de Cálculo Vectorial con Ing. Freddy Vinicio Lema Lema.

### Ejercicio 4.4.

Determine y realice la representación gráfica del dominio de la función  $f(0,0) = \frac{1}{y^2-2y-4x-3} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$  tal que el Dominio  $\Leftrightarrow$  (si sólo si)  $y^2 - 2y - 4x - 3 \neq 0 \cap x - y > 0 \Rightarrow y < x$ .

Entonces,  $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y^2 - 2y - 4x - 3 \neq 0 \Rightarrow (y - 1)^2 \neq 4(x+1) \text{ o } (y - k)^2 \neq 4(x - h) \text{ (Parábola)} \cap x - y > 0 \Rightarrow x - y > 0, x > y \text{ tal que } y < x\}$ .



Fuente: Mora, F. W. (2019)

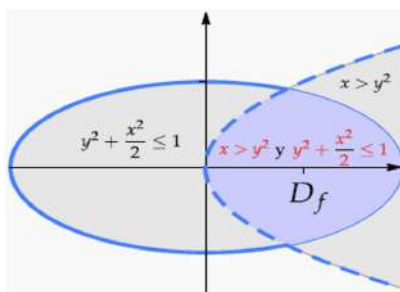


**Ejercicio 4.5.**

Determine y realice la representación gráfica del dominio de la función  $f(x, y) = \ln(x - y^2) + \sqrt{1 - y^2 - \frac{x^2}{2}}$  tal que el Dominio  $\Leftrightarrow$  (si sólo si)  $x - y^2 > 0 \Rightarrow x > y^2$  (Parábola) y  $1 - y^2 - \frac{x^2}{2} \geq 0 \Rightarrow -y^2 - \frac{x^2}{2} \geq -1 \Rightarrow \frac{y^2}{1} + \frac{x^2}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} \left( \frac{x^2}{\sqrt{2}(\sqrt{a})} + \frac{y^2}{\sqrt{1}(\sqrt{b})} \right) \leq 1$  (Elipse).

Entonces,  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x - y^2 > 0 \Rightarrow x > y^2 \cap y^2 + \frac{x^2}{2} \leq 1\}$ .

Gráficamente el dominio de  $f$  es la intersección azul de la región  $x > y^2$  (región derecha de parábola  $x = y^2$ , sin incluirla) y la región  $y^2 + \frac{x^2}{2} \leq 1$  (interior de elipse  $y^2 + \frac{x^2}{2} = 1$ , incluyéndola).

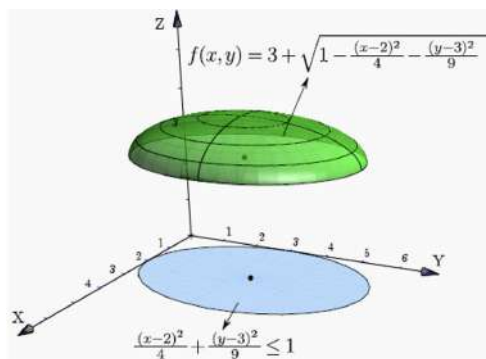


Fuente: Mora, F. W. (2019)

**Ejercicio 4.6.**

Considere la función  $f(x, y) = 3 + \sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9}}$ ;  $x \geq 0$  para que la función esté definida.

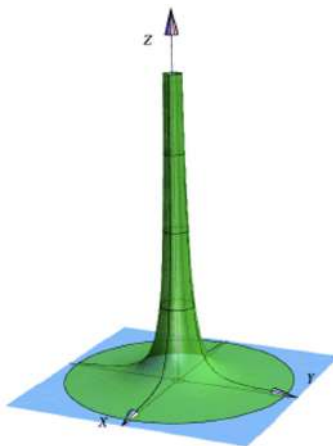
Entonces, el dominio máximo es el conjunto  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} \leq 1\}$  (dominio de la función en color celeste); es decir,  $D_f$  es región encerrada por elipse:  $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$  incluyendo el borde o limite.



Fuente: Mora, F. W. (2019)

**Ejercicio 4.7.**

La función  $z = \frac{1}{x^2+y^2}$  (dominio de la función en color celeste) sólo se define en  $(0,0)$  tal que el dominio máximo de esta función es el conjunto  $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

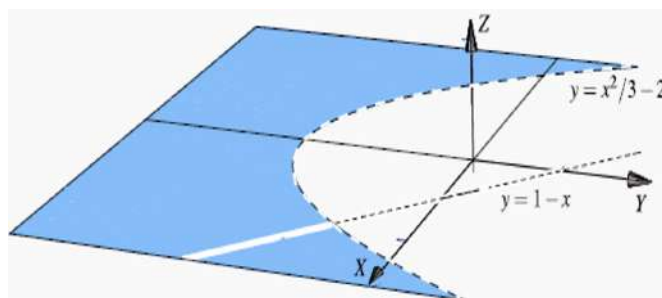


Fuente: Mora, F. W. (2019)

**Ejercicio 4.8.**

Considere la función  $f(x,y) = \frac{\text{Log}(x^2-3(y+2))}{x+y-1}$  tal que  $x + y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq -x + 1$  (sus puntos no están en el dominio) y  $x^2 - 3(y + 2) \Rightarrow y < \frac{x^2}{3} - 2$  (región por debajo de parábola  $y = \frac{x^2}{3} - 2$ , pero el dominio no la incluye, sino sólo el área por arriba de su línea “punteada”).

Entonces,  $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{x^2}{3} - 2 \cap y \neq -x + 1\}$ .

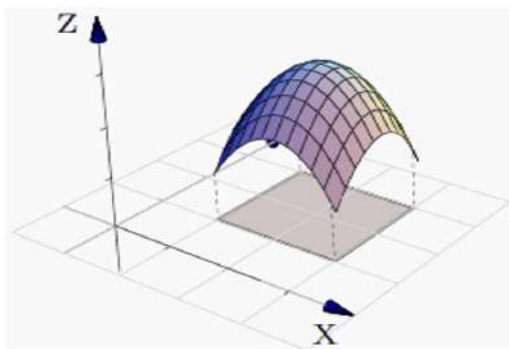


Fuente: Mora, F. W. (2019)

**Ejercicio 4.9.**

Considere la función  $f(x,y) = 3 - (x - 2)^2 - (y - 2)^2 \in \mathbb{R}^2$ . Su dominio máximo es  $\mathbb{R}^2$  aunque se hace su representación gráfica de  $f$  sobre un dominio restringido.

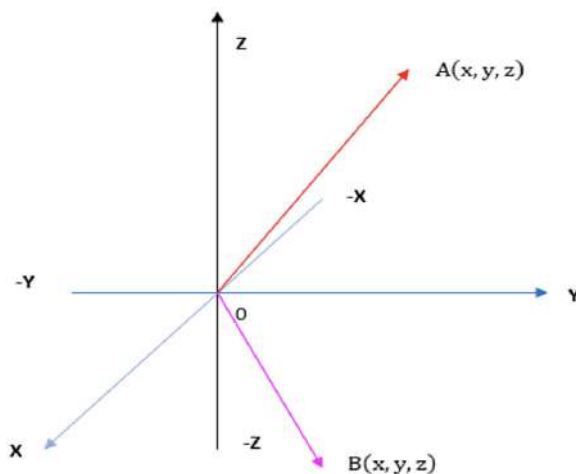
Por ejemplo:  $D = [1,3] * [1,3]$ .



Fuente: Mora, F. W. (2019)

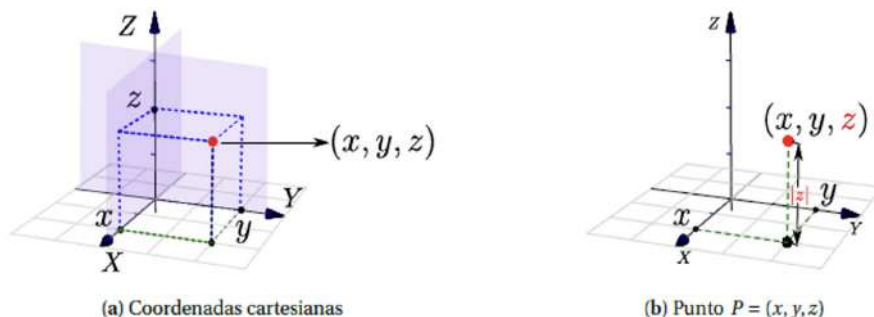
**4.6. FUNCIONES ESCALARES DE TRES VARIABLES, ESPACIO TRIDIMENSIONAL O VECTORES  $\mathbb{R}^3$**

En el caso de vectores  $\mathbb{R}^3$  los vectores se representan gráficamente así:



Fuente: Mora, F. W. (2019)

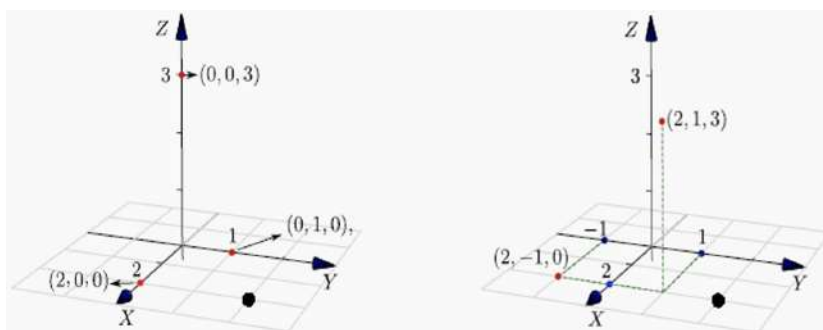
Donde,  $y = f(x) \Rightarrow z = f(x,y)$ . De acuerdo con Mora (2016), otra forma de representar el Espacio Tridimensional con puntos  $P(x,y,z) \Rightarrow x,y,z \in \mathbb{R}$  es:



Fuente: Mora, F. W. (2019)

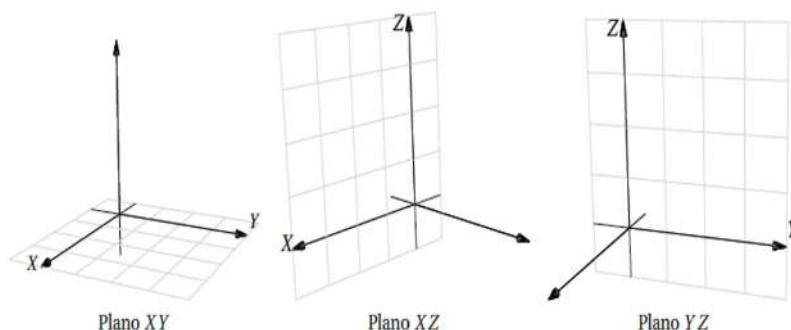
Ejemplo:

Los puntos en eje X tienen coordenadas  $(x,0,0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , puntos en eje Y tienen coordenadas  $(0,y,0)$ ,  $y \in \mathbb{R}$  y puntos en eje Z tienen coordenadas  $(0,0,z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Entonces:



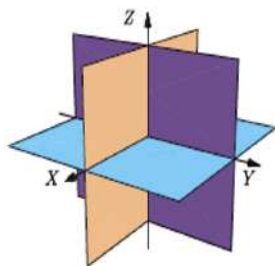
Fuente: Mora, F. W. (2019)

Hay tres planos  $XY$ ,  $XZ$  y  $YZ$  que contienen un par de coordenadas de ejes coordenados:  $XY$  contiene eje X y Y,  $XZ$  contiene X y Z y, finalmente,  $YZ$  contiene Y y Z.

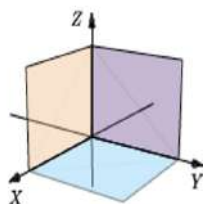


Fuente: Mora, F. W. (2019)

Hay tres planos  $XY, XZ$  y  $YZ$  dividen el espacio en ocho partes llamadas Octantes tal que el primer octante corresponde a la parte positiva de los ejes:



(a) Octantes



(b) Primer octante

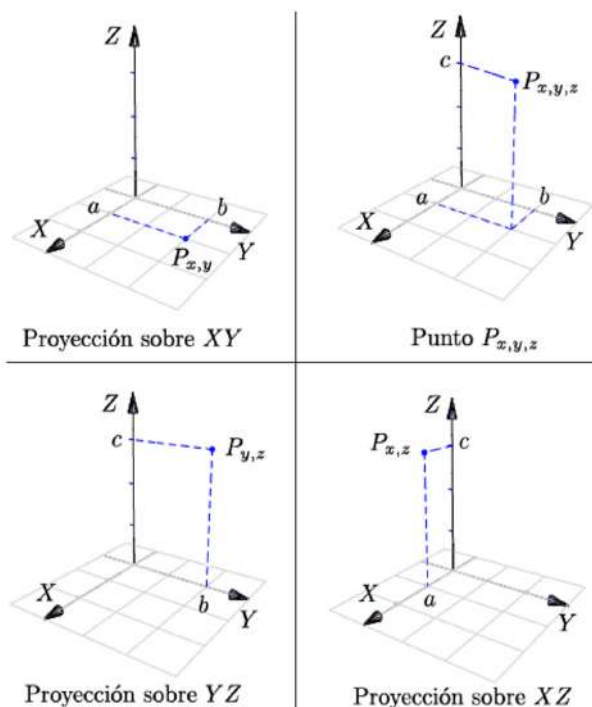


(c) Habitación en el primer octante

Fuente: Mora, F. W. (2019)

Para visualizar las vistas isométricas de un punto considere el punto  $P_{(x,y,z)} = (a,b,c)$  en espacio tridimensional, se define su vista de este punto en el plano  $XY$  como punto  $P_{(x,y)} = (a,b,0)$ . Entonces, se define la vista en el plano  $YZ$  como punto  $P_{(y,z)} = (0,b,c)$  y, por ultimo, la vista del plano  $XZ$  como  $P_{(x,z)} = (a,0,c)$ .

Por lo tanto, estas vistas se denominan “Proyecciones Perpendiculares” del punto en el plano respectivo:



Fuente: Mora, F. W. (2019)

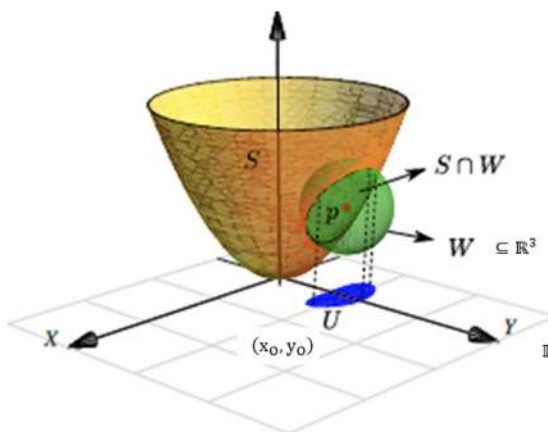
Las superficies en el espacio  $R^3$ , son las superficies formadas en puntos  $(x,y,z)$  tal que su forma implícita es  $z = f(x,y)$  ó, en forma explícita,  $F(x,y,z) = 0$ . Sin embargo, no todas las superficies “suaves” en  $R^3$ , con o sin desigualdades, se pueden describir únicamente con la ecuación  $F(x,y,z) = 0$ .

El estudio de superficies de manera general, se requiere estudiarlas “totalmente”:

- a) Una superficie  $S$  es un subconjunto de  $R^3$  que en un entorno de cualquiera de sus puntos, luce como un “parche de  $R^2$ ”. Es decir, para cada  $p \in S \ni$  un entorno abierto  $U \subseteq R^2$  y un entorno  $W \subseteq R^3$  que contiene a  $p$  tal que se puede establecer una biyección ( $\Leftrightarrow$ ) continua (HOMEOMORFISMO).

Tal que si  $r_p: U \rightarrow S \cap W$  a cada homomorfismo  $r_p$  se llama “parche” o PARAMETRIZACIÓN del conjunto abierto  $S \cap W$ .

Entonces, una colección de “parches” que cubren  $S$  se llama “ATLAS DE  $S$ ”.

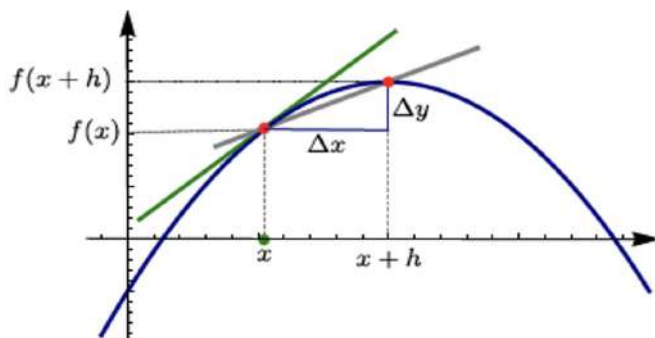


Fuente: Mora, F. W. (2019)

Si una superficie  $S$  tiene ecuación  $z = f(x,y)$  con  $(x,y)$  ó  $(x,z) \in D \subseteq R^2$ , entonces la superficie sería de un solo “parche” y una parametrización equivaldría a:

$$r(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k} \text{ ó, equivalente a } r(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} (x,y) \in D$$

Las Derivadas Parciales ( $z = f(x,y)$ ) son conocidas en cálculo en una variable, expresadas en “Tasa de Cambio” como:  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$



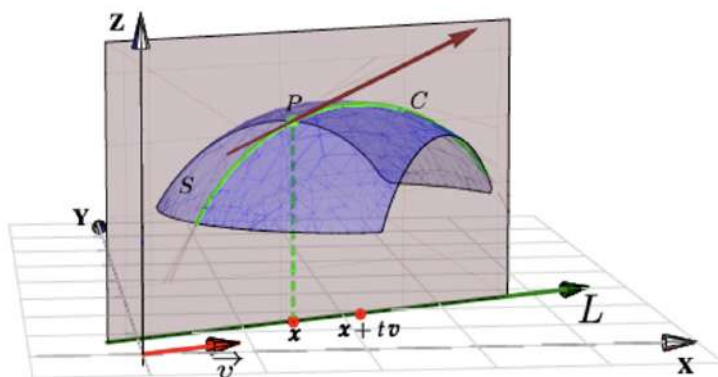
Fuente: Mora, F. W. (2019)

Entonces, si el límite existe implica ( $\Rightarrow$ ) que la derivada es la recta tangente a  $f$  en  $x$ . Por lo tanto, si  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , la derivada de  $f$  en  $x = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  en la dirección del vector unitario  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  mide la tasa (instantánea) de cambio de  $f$  mediante recta  $L_{(v)} = x + hv$  cuando  $h = 0$ .

Obteniendo la derivada en dirección de  $v$  con el límite  $\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h} \right]$ .

A continuación, se tiene que el módulo de la recta como vector es  $\|x - (x + hv)\| = \|x - x - hv\| = \|hv\| = h$  suponiendo que  $\vec{v}$  es unitario (vector cuyo módulo es igual a 1 o vector normalizado). Geométricamente, ésta derivada es la pendiente de la recta tangente a curva  $\mathbb{C}(h) = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2, f(x + hv))$  en  $h = 0$ .

Tal que, ésta curva es la intersección de superficie  $S$  de ecuación  $z = f(x, y)$  con el plano generado por recta  $L$ :



Fuente: Mora, F. W. (2019)

En cálculo diferencial, una Derivada Parcial de una función de diversas variables es la derivada respecto a cada una de esas variables manteniendo las otras como constantes ( $A = f(x, y, z, \dots)$ ). Las derivadas parciales son útiles en cálculo

vectorial, geometría diferencial, física matemática, etcétera. “∂” es letra “d” redondeada, conocida como “d de Jacobi”, con que se representa la “Derivada Parcial”.

El interés particular será respecto a las “Derivadas Parciales”:

$$\frac{\partial f}{\partial x} < \begin{array}{l} \text{Derivada en dirección de eje X} \\ \text{Derivada parcial respecto a X} \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} < \begin{array}{l} \text{Derivada en dirección de eje Y} \\ \text{Derivada parcial respecto a Y} \end{array}$$

Por definición, sea  $v \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $f: v \rightarrow \mathbb{R}$ .

Entonces, la derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  de  $f$  respecto a variable  $X_i$  en punto  $x = (x_1, \dots, x_n)$  se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} \right]$$

Siempre y cuando el límite exista ( $\exists$ ), donde  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  con 1 en la  $i$ -ésima posición. El dominio de  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  es el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  en que este límite existe.

El Caso de Dos Variables implica que, siendo  $z = f(x, y)$ , puede denotarse de varias formas equivalentes:  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, z_x$  o  $f_x$ .

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \right]$$

El Cálculo Directo de las  $\partial$  se puede comprender mediante los siguientes ejemplos:

$$1. f(x, y) = \sqrt[3]{X} * \sqrt[3]{Y} = X^{1/3} * Y^{1/3} \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3 X^{2/3}} * Y^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{Y}}{3 \sqrt[3]{X^2}}$$

$$\text{Ahora bien, } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3 Y^{2/3}} * X^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{X}}{3 \sqrt[3]{Y^2}}$$

Para saber si la función es derivable en  $(x, y) = (0, 0)$  se tiene que aplicar la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{0 - 0}{h} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{0 - 0}{h} \right) = 0$$



2.  $z = x^y \Rightarrow x > 0$  y, recordando regla de la cadena, es  $(a^u)' = ? \Rightarrow a^u * \text{Ln}(a) * u'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y * x^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y * \text{Ln}(x) * y' = x^y * \text{Ln}(x)$$

Si  $\mathbb{C}(r, \theta) = r^n * \text{Cos}(n\theta)$   $n \in \mathbb{N}$  en un Octante. Tal que:

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial r} = n * r^{n-1} * \text{Cos}(n\theta)$$

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \theta} = r^n * (-n) * \text{Sen}(n\theta)$$

$$z = \frac{\text{Cos}(xy) + x\text{Sen}(2y)}{2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y \text{Sen}(xy) + \text{Sen}(2y)}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x \text{Sen}(xy) + 2x \text{Cos}(2y)}{2}$$

Las Derivadas Parciales de Orden Superior comprenden las derivadas a partir de la segunda derivada o más y que se efectúa derivando tantas veces como se indique. Las derivadas parciales son útiles en cálculo vectorial y geometría diferencial.

Su representación es, si  $z = f(x, y)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  funciones de dos variables, se tienen  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  y  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  como segundas derivadas parciales.

También, se tienen las siguientes notaciones:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Si se deriva respecto a  $x$ , la variable  $y$  se tomará como una constante y no como una variable, así como viceversa.

**Ejercicio 4.10.**

Sea  $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$  ó  $z = x^3 + x^2y^2 + y^3$ .

Por lo tanto:

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2 + 0 & \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2x^2y + 3y^2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y^2 & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2 + 6y \end{array}$$

**Ejercicio 4.11.**

Se tiene, sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces derivable y  $z = (\mu)$  con  $\mu = x^3 y^4$ .

Entonces:

$\frac{\sigma z}{\partial x} = f'(\mu) * 3 x^2 y^4$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(\mu) * 3 x^2 y^4 * 3 x^2 y^4 + 6 xy^4 * f'(\mu)$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''(\mu) * 4 x^3 y^3 * 3 x^2 y^4 + 4 * 3 x^2 y^3 * f'(\mu)$ <p style="text-align: center; font-size: small;">(multiplican coeficientes de <math>\partial y \partial x</math> con exponentes menores de ambas variables)</p>	$\frac{\sigma z}{\partial x} = f'(\mu) * 4 x^3 y^3$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(\mu) * 4 x^3 y^3 * 4 x^3 y^3 + 12 x^3 y^2 * f'(\mu)$ $\frac{\partial^2 z}{x \partial y} = f''(\mu) * 3 x^2 y^4 * 4 x^3 y^3 + 3 * 4 x^2 y^3 * f'(\mu)$ <p style="text-align: center; font-size: small;">(multiplican coeficientes de <math>\partial x \partial y</math> con exponentes menores de ambas variables)</p>
---	--

Es importante tomar en cuenta la “regla de la cadena” y respecto a qué variable se deriva, según ORDEN pedido:  $\partial y \partial x$  o  $\partial y \partial x$ .

La Regla de la Cadena es una fórmula para la derivada de la composición de dos funciones. Tiene aplicaciones en el cálculo algebraico de derivadas cuando existe composición de funciones.

En términos intuitivos, si una variable  $y$  depende de una segunda variable  $u$ , que a la vez depende de una tercera variable  $x$ ; entonces, la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  puede ser calculada con el producto de la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $u$  multiplicado por la razón de cambio de  $u$  con respecto a  $x$ .

Al recordar el cálculo en una variable, Método de Integración por partes por ejemplo, se tienen  $f(u)$  y  $u(x)$  derivables,

tal que si  $\mu = x^2$ ,  $y = \text{Ln}(x^2) \Rightarrow y = \text{Ln}(\mu) \therefore y' = \frac{1}{x^2} * 2x$  (derivada interna de  $\mu$ ).

Por lo tanto:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta \mu} - \frac{\delta \mu}{\delta x}$$

### Ejercicio 4.12.

$\int x\sqrt{x+3} \delta x$  tal que  $\mu = x$ , variable más fácil de derivar,  $\rightarrow \mu' = \delta x$  mientras que, la variable más fácil de integral,  $v' = \sqrt{x+3}$  es  $\rightarrow$  su integral es  $\frac{(x+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} * (x+3)^{\frac{3}{2}}$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \mu \delta v &= \mu v - \int v \delta \mu \\ &= \frac{2}{3} * (x+3)^{\frac{3}{2}} * x - \frac{2}{3} \int (x+3)^{\frac{3}{2}} \delta x \\ &= \frac{2}{3} * (x+3)^{\frac{3}{2}} * x - \frac{2}{3} * \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c \\ &\therefore \int x\sqrt{x+3} \delta x \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} * x - \frac{4}{15} * \sqrt{x^5} + c \end{aligned}$$

### Ejercicio 4.13.

$\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}} \delta x$  al que  $\mu = x$ , variable más fácil de derivar,  $\rightarrow \mu' = \delta x$  mientras que, la variable más fácil de integral,  $v' = (2x-5)^{-\frac{1}{2}}$  es  $\rightarrow$  su integral es  $\frac{(2x-5)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{2x-5}$ .

Si:  $\mu = 2x - 5 \Rightarrow \delta \mu = 2 \delta x \therefore \delta x = \frac{\delta \mu}{2}$ .

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \mu \delta v &= \mu v - \int v \delta \mu \\ &= x = x * (2x-5)^{\frac{1}{2}} - 2 \int \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{2} \delta \mu \\ &= x * (2x-5)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} * \left(\mu^{\frac{3}{2}}\right) + c, \end{aligned}$$

pues  $\int \sqrt{2x-5} \delta x = \frac{(2x-5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{(2x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} * (\mu^{\frac{3}{2}})$ .

Por lo tanto,  $\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}} \delta x = x(2x-5)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} [(2x-5)^{\frac{3}{2}}] + c$

Sin embargo, la regla de la cadena en varias variables presenta los siguientes casos particulares:

**CASO I:**

Sean  $x=x(t)$  y  $y=y(t)$  funciones derivables,  $z=f(x,y)$  diferenciable en  $(x,y)=[x_-(t), y_-(t)]$ . Entonces,  $z=f(x_-(t), y_-(t))$  es derivable en  $y$ .

Por lo tanto:

$$\frac{\delta z}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\delta y}{\delta t}$$

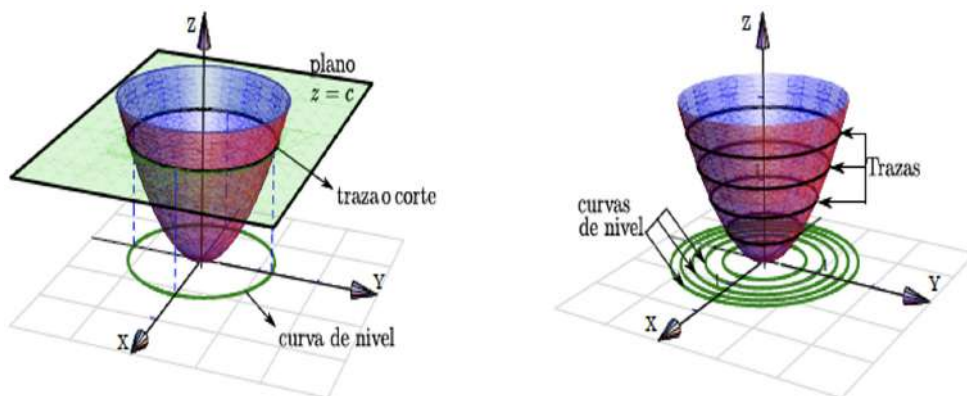
**CASO II:**

Sean funciones  $\mu = \mu(x,y)$  y  $v = v(x,y)$  con derivadas parciales en  $(x,y)$ . Si  $z = f(\mu, v)$  diferenciable en  $(\mu, v) = (\mu(x,y), v(x,y))$  tal que  $z = f(\mu, v)$  tiene derivadas parciales de primer orden en  $(x,y)$  y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \mu} * \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \mu} * \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial y}$$

El bosquejo gráfico consiste en un conjunto de curvas, llamadas trazas o cortes verticales y horizontales:



Fuente: Mora, F. W. (2019)

En las curvas de nivel y trazas o cortes se tienen los siguientes elementos:

- Sea  $S$  una superficie en el espacio:  $F(x,y,z) = 0$ .
- Sea  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfacen:  $F(x,y,c) = 0$ .
- La misma que define una curva en plano  $XY$  conocida como Curva de Nivel de la superficie  $S$ .
- Geométricamente es el corte entre proyección  $XY$  y plano  $z = c$ .
- A las curvas  $F(x,y,c) = 0$ ;  $z = c$  (si existen) se les llama trazas o cortes de superficie  $S$ .

Las trazas o cortes tienen como fin realizar el dibujo de una superficie  $S$  de ecuación implícita  $F(x,y,z) = 0$  o explícita  $z = f(x,y)$ . Los cortes a esta superficie  $S$  mediante planos paralelos ( $\parallel$ ) a planos coordenados, que tienen apariencia de “alambres” se llaman trazas o cortes.

#### Ejercicio 4.14.

Superficie ( $S$ ), plano ( $\Pi$ ), traza  $z = f(c,y)$ ;  $x = c$  o  $F(c,y,c) = 0$ ;  $x = c$ .

Se llama superficie al conjunto de puntos del espacio euclidiano tridimensional cuyas coordenadas satisfacen la ecuación  $F(x,y,z) = 0$ ; aunque, esta ecuación expresa una relación entre tres variables, pero no siempre es así. Su objetivo principal es estudiar superficies simples, como planos, superficies cilíndricas y superficies cuadráticas.

Por lo tanto, las curvas en el espacio se describen por medio de una ecuación cartesiana  $F(x,y) = c$ .

#### Ejercicio 4.15.

La circunferencia de radio  $a$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$ . Por lo tanto, la curva  $\mathcal{C}$  como un conjunto de puntos se representa así:

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / F(x,y) = c\}$$

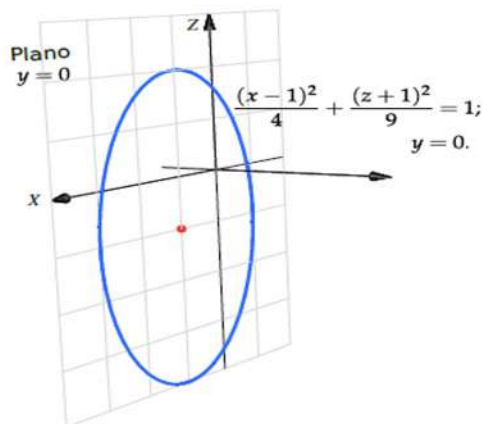
Así, las curvas  $\mathbb{R}^3$  podrían ser definidas por un par de ecuaciones, como inter-

sección de dos superficies:

$$F_1(x, y, z) = c_1; F_2(x, y, z) = c_2$$

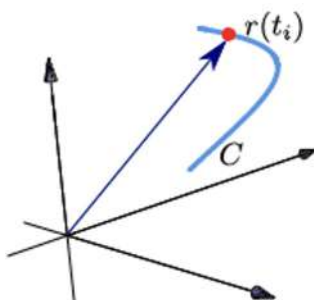
### Ejercicio 4.16.

La elipse  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9} = 1$  se gráfica en plano  $(\Pi)$  XZ con  $Y = 0$ .



Fuente: Mora, F. W. (2019)

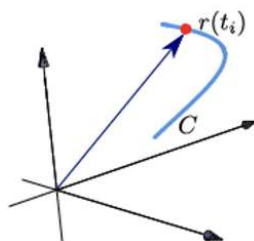
La ecuación paramétrica es otra manera de definir una curva, es como el lugar geométrico de un punto en movimiento. Donde  $r(t)$  es la posición del punto en el instante  $t$ . Siendo las ecuaciones en Curvas Planas,  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  y Curvas en el Espacio,  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ , respetivamente.



Fuente: Mora, F. W. (2019)

**Ejercicio 4.17.**

Una circunferencia en plano  $(II)$   $(x,y)$ , de radio  $a$  con centro en el origen. Su gráfica cartesiana sería  $x^2 + y^2 = a^2; z = 0$ . En cambio, una ecuación paramétrica sería  $r(t) = a \cos(t)\vec{i} + a \sin(t)\vec{j} + 0\vec{k}$  ó  $r(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ a \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$



Fuente: Mora, F. W. (2019)

Donde:

- Curva en plano  $XY \rightarrow F(x,y) = 0 \quad z = 0$ .
- Curva en plano  $XY \rightarrow F(x,y) = 0 \quad y = 0$ .
- Curva en plano  $XY \rightarrow F(x,y) = 0 \quad x = 0$

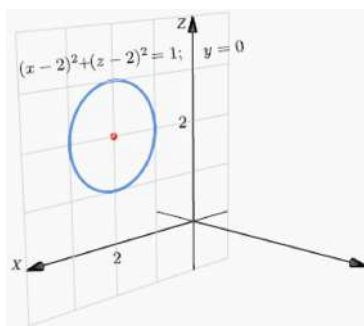
**Ejercicio 4.18.**

Se grafica  $C = (x - 2)^2 + (z - 2)^2 = 1; y = 0$ .

Tal que, si  $C = (x - 2)^2 + (z - 2)^2 = 1; y = 0$  implica el plano  $(II)$   $x,y$  con radio = 1 y centro  $(2,0,2)$ .

En cambio, si  $C: r(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos(t) \\ 0 \\ 2 + \sin(t) \end{pmatrix}$ ,

tal que  $t \in [0, 2\pi]$  ó  $r(t) = (2 + \cos(t))\vec{i} + 0\vec{j} + (2 + \sin(t))\vec{k}$

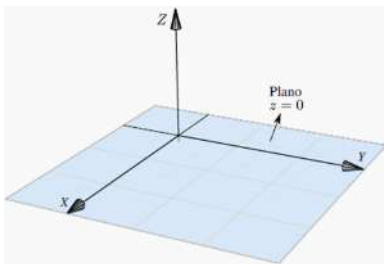


Fuente: Mora, F. W. (2019)

**Ejercicio 4.19.**

El  $\Pi: z = 0 \rightarrow (x,y,z)/y \in \mathbb{R} \Rightarrow z = 0$  es el plano  $XY$ . Paramétricamente esto es:

$$\Pi: r(t, s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = t \vec{i} + s \vec{j} + 0 \vec{k}, \text{ tal que } (t, s) \in \mathbb{R} * \mathbb{R}:$$



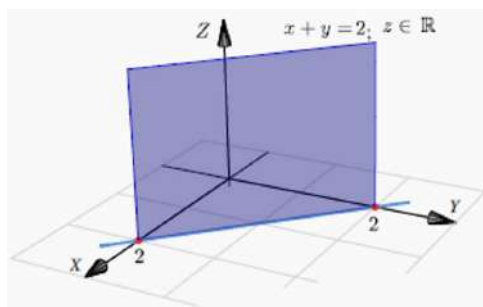
Fuente: Mora, F. W. (2019)

Los planos de la ecuación cartesiana con una variable ausente significan que una variable tiene coeficiente nulo.

**Ejercicio 4.20.**

$\Pi: 0x + by + cz = d, \Pi: x + y = 2 \rightarrow \{(x,y,z): x + y = 2; z \in \mathbb{R}\}$ , tal que  $x + y = 2$  es recta con  $z = 0$  v el plano se levanta sobre la recta. Parametrizada esta ecuación

sería:  $x + y = 2 \rightarrow t + y = 2$ . Donde  $\Pi: r(t, s) = \begin{pmatrix} t \\ z - t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$  tal que  $t, s \in \mathbb{R} * \mathbb{R}$ :



Fuente: Mora, F. W. (2019)

Los planos de la ecuación cartesiana sin variables ausentes significan que  $ax + by + cz = d$  tal que  $a,b,c \neq 0$ . Entonces, se determinan las intersecciones con cada eje coordenado, se trazan segmentos y se extienden con paralelas.



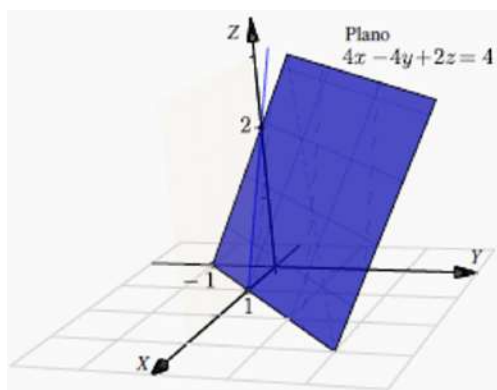
**Ejercicio 4.21.**

$\Pi: 4x - 4y + 2z = 4$  implica

$x$	$y$	$z$
0	0	2
1	0	0
0	-1	0

Siendo los puntos de intersección con los ejes de coordenadas  $x = 1$ ,  $y = -1$  y  $z = 2$ , tal que  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,-1,0)$  y  $C(0,0,2)$ , parametrizado sería:

$$\Pi: r(t, s) = A + (B - A)t + (C - A)s = \begin{pmatrix} t \\ t + s - 1 \\ zs \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \text{ tal que } t, s \in \mathbb{R}.$$

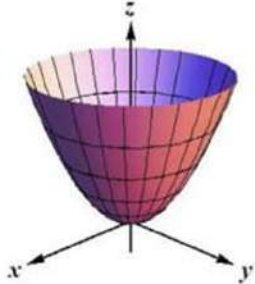

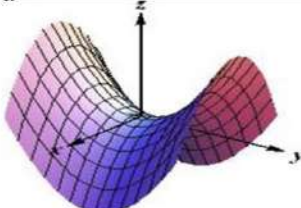
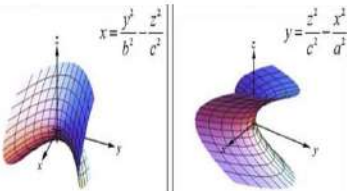




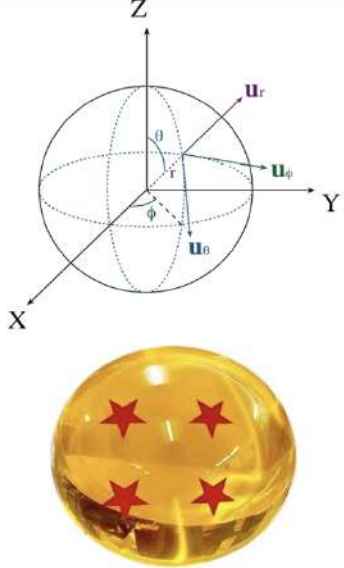
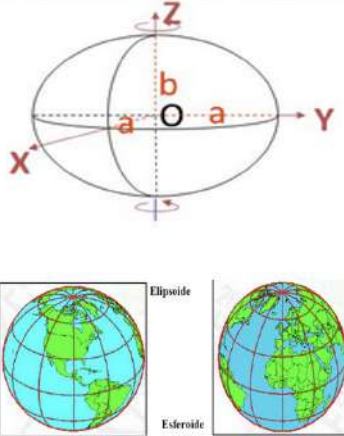
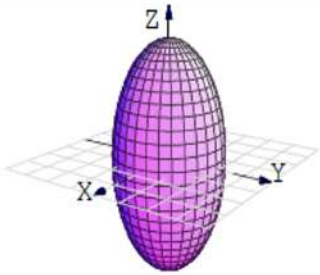
Fuente: Mora, F. W. (2019)


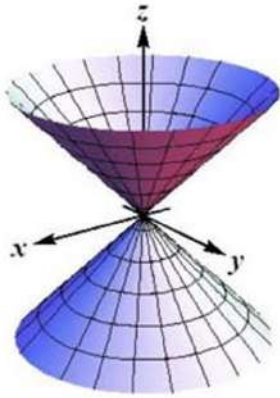

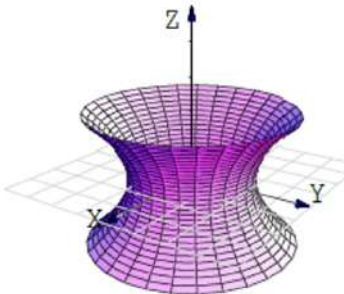
Las superficies cuadráticas se producen al rotar una cónica alrededor de su eje focal. Estas superficies satisfacen una ecuación de segundo grado en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  llamadas superficies cuadráticas o cuádricas. Se considera cuadrática en posición estándar (sin rotación) si:  $AX^2 + BY^2 + CZ^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ .


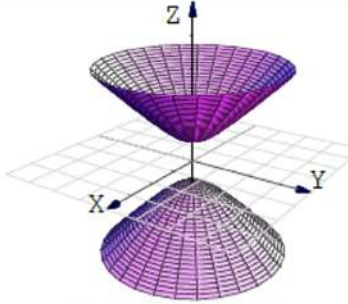

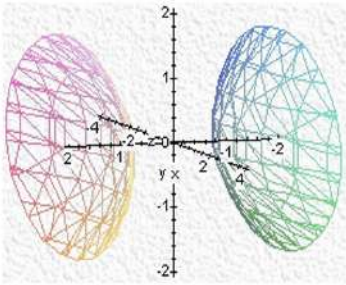
Existen 17 tipos estándar cuadráticas (ver figura 14).

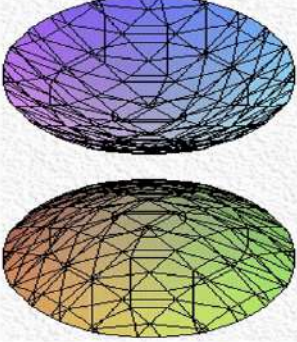

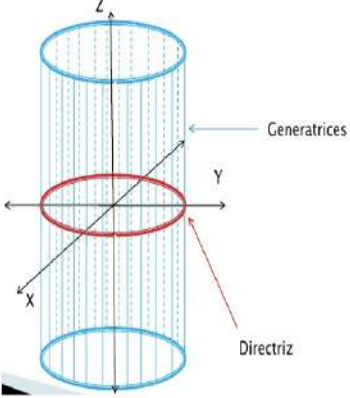

Tabla 14 Tipos estándar cuadráticas o superficies canónicas centradas en el origen

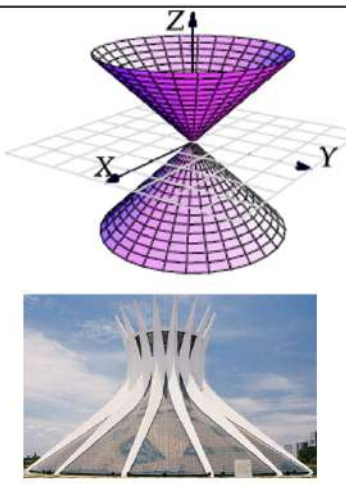
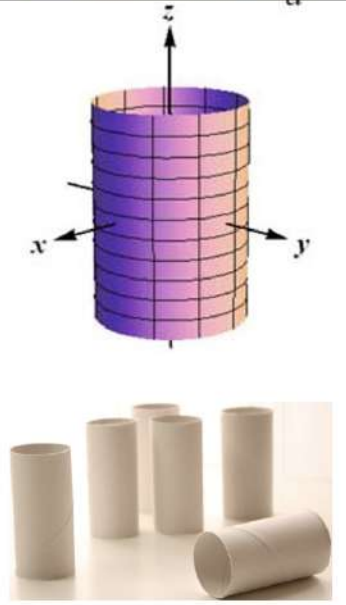
Tipos estándar cuadráticas o superficies canónicas centradas en el origen			
Tipo	Ecuación	Observaciones	Figura geométrica
Paraboloide	$\left(\frac{X}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = \frac{Z}{c}$	<p>Es una cuádrlica, un tipo de superficie tridimensional que se describe mediante ecuaciones. Pueden ser elípticos <math>\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}\right)</math> o hiperbólicos <math>\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}\right)</math>, según sea que sus términos cuadráticos (los que contienen variables elevadas al cuadrado, aquí indicadas como x e y) tengan igual o distinto signo, respectivamente.</p>	 
			   

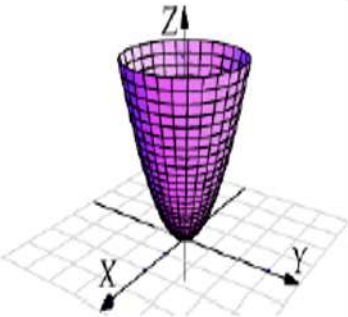

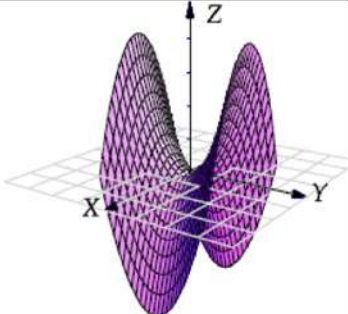

Tipos estándar cuadráticas o superficies canónicas centradas en el origen			
Tipo	Ecuación	Observaciones	Figura geométrica
Esfera	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$	Es una cuádrica, caso particular de esferoide y un tipo de superficie tridimensional que se describe mediante una ecuación.	
Esferoide	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$	Es un caso particular de elipsoide. Es un elipsoide de revolución; es decir, la superficie que se obtiene al girar una elipse alrededor de uno de sus ejes principales. Por convenio, el eje de simetría se denomina c y se sitúa en el eje de coordenadas cartesianas z; el eje perpendicular al de simetría se denomina a.	
Elipsoide	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$	Es simétrico respecto a cada uno de los tres planos coordenados y tiene intersección con ejes coordenados en $(\pm a, 0, 0)$ , $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$ . La traza del elipsoide sobre cada uno de los planos coordenados es un único punto o una elipse.	

Tipos estándar cuadráticas o superficies canónicas centradas en el origen			
Tipo	Ecuación	Observaciones	Figura geométrica
			
Cono	$\frac{Z^2}{c^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$	<p>Cuádricas formadas por desplazamiento de una recta (generatriz) que pasa siempre por un punto fijo llamado vértice a lo largo de una curva plana (cerrada o abierta) que se halla en un plano diferente al del vértice, denominada directriz del cono. Es decir, es un sólido de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al círculo conformado por el otro cateto se denomina base y al punto donde confluyen las generatrices se llama vértice o cúspide. Análogamente se tendrán conos: <math>\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}</math> y <math>\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}</math>.</p>	 
Hiperboloide de una hoja	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$	<p>Hiperboloide de una hoja tiene trazas sobre planos horizontales <math>z = k</math>, que son elipses <math>\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}</math>. Sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas o un par de rectas que se intersecan, mientras que un hiperboloide de dos hojas es</p>	

Tipos estándar cuadráticas o superficies canónicas centradas en el origen			
Tipo	Ecuación	Observaciones	Figura geométrica
		una superficie con dos <i>hojas</i> o mantos separados. Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son elipses y sobre planos verticales son hipérbolas.	
Hiperboloide de dos hojas	$\frac{Z^2}{c^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1$		 
Hiperboloide elíptico	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$	Es una superficie cuádrica, como elipsoide, hiperboloide elíptico de dos hojas, cono elíptico, hiperboloide elíptico de una hoja, paraboloides elíptico y el paraboloides hiperbólico. En otras palabras, es el cuerpo formado por la superficie que recubre dos	

Tipos estándar cuadráticas o superficies canónicas centradas en el origen			
Tipo	Ecuación	Observaciones	Figura geométrica
	$\pm \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$	<p>hipérbolas ortogonales entre sí y que comparten un mismo eje. Dependiendo de qué eje compartan se obtienen el hiperboloide elíptico de dos hojas (si el eje común es el mayor o real) y el hiperboloide elíptico de una hoja (cuando el eje común es el menor o imaginario).</p>	 
Cilindro	$X^2 + Y^2 = r^2$	<p>Se origina del griego "kylindros" que significa "rodillo", es un cuerpo sólido geométrico que posee dos extremos planos y redondos u ovalados muy similares y con un lado curvo, cuyo desarrollo es un rectángulo. Es una superficie de las denominadas cuádricas formada por el desplazamiento paralelo de una recta llamada generatriz a lo largo de una curva plana, denominada directriz del cilindro. Si la directriz es un círculo y la generatriz es perpendicular a él, entonces la superficie obtenida, llamada cilindro circular recto, será de revolución y tendrá por lo tanto todos sus puntos situados a una distancia fija de una línea recta, el eje del cilindro. El sólido</p>	 

Tipos estándar cuadráticas o superficies canónicas centradas en el origen			
Tipo	Ecuación	Observaciones	Figura geométrica
		Encerrado por esta superficie y por dos planos perpendiculares al eje también es llamado cilindro. Este sólido es utilizado como una superficie Gaussiana.	
Cono elíptico	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{Z^2}{c^2}$	Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son elipses. Sus trazas sobre planos verticales corresponden a hipérbolas o un par de rectas	
Cilindro elíptico	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$	Es una cuádrica formada por desplazamiento paralelo de una recta llamada generatriz a lo largo de una curva plana, que puede ser cerrada o abierta, denominada directriz del cilindro. Se construye desplazando una elipse a través de un eje que pasa por su centro y que es perpendicular al plano de la elipse.	

Tipos estándar cuadráticas o superficies canónicas centradas en el origen			
Tipo	Ecuación	Observaciones	Figura geométrica
Paraboloide elíptico	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$	Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$ . Sus trazas sobre planos verticales sean $x = k$ o $y = k$ son parábolas.	 
Paraboloide hiperbólico	$\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = \frac{z}{c}$	Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son hipérbolas o dos rectas ( $z = 0$ ). Sus trazas sobre planos verticales paralelos al plano $x$ son parábolas que abren hacia abajo, mientras que las trazas sobre planos verticales paralelos al plano $YZ$ son parábolas que abren hacia arriba. Su grafica tiene la forma de “una silla de montar”.	 

Fuente: Elaboración propia con base en Zill, D. G. & Wright, W. S. (2011), cursos de Cálculo Vectorial con Ing. Freddy Vinicio Lema Lema (2015), Mora, F. W. (2016) y Mora, F. W. (2019)



## 4.7. POLINOMIO DE PRIMER ORDEN

Generalmente, la relación entre respuesta y variables independientes se desconoce. En consecuencia, se requiere un modelo que aproxime esta relación funcional entre  $Y$  con variables independientes o exógenas ( $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k$ ). Este modelo provee bases para un nuevo experimento que lleva a un nuevo modelo y el ciclo se repite.

Si la respuesta se describe adecuadamente por una función lineal de variables exógenas se usa el modelo de primer orden  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$ .

Los parámetros del modelo se estiman mediante el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO). Una vez obtenidos los estimadores se sustituyen en ecuación y se obtiene el modelo ajustado  $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k + \varepsilon$ . Este modelo se usa cuando se estudia el comportamiento de variable de respuesta, dependiente o endógena únicamente en la región y cuando se conoce la forma de la superficie.

### 4.7.1. Prueba de significancia de coeficientes estimados en modelo ajustado

Para estimar los coeficientes se requiere  $N \geq k + 1$  valores respuesta ( $Y$ ). El análisis de datos de corridas se presenta en la tabla 15 de Análisis de Varianza con las siguientes fuentes de variación que contribuyen a su variación total:

Tabla 15 Análisis de Varianza o ANOVA

Análisis de Varianza o ANOVA						
F. de V (Factor de Variación) o VF (Variation factor)	Gl (Grados de Libertad) o Df (Degrees of freedom)	SC (Suma de Cuadrados) o Sum Sq (Sum of square)	CM (Cuadrado Medio) o Mean Sq (Mean squares)	F (calculada) o F value (Calculated F)	F (Tablas)	R <sup>2</sup>
Total	N - 1	$SST = \sum_{u=1}^N (Y_u - \bar{Y})^2$				
Regresión	p - 1 (Numerador)	$SSR = \sum_{u=1}^N (\hat{Y}_u - \bar{Y})^2$	SCR/p - 1	$\frac{C. M. Regresión}{C. M. Residuo}$	$\frac{Gl_{(Numerador)}}{Gl_{(Denominador)}}$	$\frac{SSR}{SST}$
Residuo	N - p (Denominador)	$SSE = \sum_{u=1}^N (Y_u - \hat{Y}_u)^2$	SCR/N - p			

Fuente: Elaboración propia con base en modificaciones de González, B. G. (2010) y Hurtado, M. J. & Gómez, F. R. (2010). Y<sub>u</sub> es el valor observado en la u-ésima corrida y p representa el número de términos del modelo ajustado.

La prueba de significancia de esta ecuación de regresión ajustada tiene por  $H_0: \beta_s$ , menos  $\beta_0 = 0$  vs  $H_a: \beta_s$ , menos  $\beta_0 \neq 0$ . La prueba supone que el error se comporta normalmente y se usa el estadístico de *F de Fisher Snedecor*, tal que si el valor  $F_{Calculada}$  es mayor que  $F_{tablas}$  ( $\alpha; p-1$  o numerador y  $N-p$  o denominador) indica que la variación explicada por el modelo es significativamente mayor que la variación no explicada o inexplicable.

### 4.7.2. Prueba de falta de ajuste

Se presenta por la no planaridad o curvatura de la superficie de respuesta, pues no se detecta debido a la exclusión de términos cuadráticos o cúbicos, como  $b_{ii}\chi_i^2, b_{ii}\chi_i^3$  o de términos de producto cruzado  $b_{ij}\chi_i\chi_j\chi_k$  que referentes al efecto interacción entre factores.

Esta prueba requiere que el diseño del experimento satisfaga los siguientes elementos:

1. Número de distintos puntos de diseño  $n$  debe exceder el numero de términos en el modelo ajustado ( $n > k + 1$ ).
2. Al menos dos réplicas deben colectarse en uno o más puntos del diseño para estimar la varianza del error.
3. Valores del error aleatorio ( $\epsilon_u$ ) deben asumir una distribución normal e independiente con una varianza común  $\sigma^2$  (homocedasticidad).

Si se cumplen condiciones 1 y 2, la suma de cuadrados residual se compone de dos fuentes de variación. La primera es la falta de ajuste del modelo ajustado debido a exclusión de términos de mayor orden y la segunda es la variación del error puro. Su cálculo requiere la suma de cuadrados calculada de réplicas que recibe el nombre “error puro de suma de cuadrados” y sustraer la suma de cuadrados residual, para obtener la suma de cuadrados de la falta de ajuste:

$$SS \text{ Error Puro} = \sum_{l=1}^n \sum_{u=1}^n (Y_{lu} - \bar{Y}_l)^2$$

Donde,  $Y_{lu}$  es  $u$ -ésima observación del  $l$ -ésimo punto del diseño,  $u = 1, 2, 3, 4, \dots, r_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4, \dots, n$  y  $\bar{Y}_l$  es promedio de  $r_l$  observaciones del  $l$ -ésimo punto del diseño.

$$SS \text{ Falta de Ajuste} = SSE - SS \text{ Error Puro} = \sum_{l=1}^n r_l (\hat{Y}_l - \bar{Y}_l)^2$$

Donde,  $\hat{Y}_l$  es valor predicho de respuesta en  $l$ -ésimo punto del diseño. La prueba de adecuación del modelo ajustado es:

$$F_{\text{Calculada}} = \frac{SS \text{ Falta de Ajuste} / n - p}{SS \text{ Error Puro} / N - n} = \frac{\sum_{l=1}^n r_l (\hat{Y}_l - \bar{Y}_l)^2 / n - p}{\sum_{l=1}^n \sum_{u=1}^n (Y_{lu} - \bar{Y}_l)^2 / N - n}$$

Cuando  $F_{\text{Calculada}} \leq CME_{\text{Residual}}$  es usado para estimar  $\sigma^2$  y, también, se usa para probar la significancia del modelo ajustado tal que cuando la hipótesis de suficiencia de ajuste no se acepta se debe elevar el grado del modelo aumentando términos de producto cruzado y/o términos de mayor grado en  $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k$ .

Si se requieren puntos adicionales para estimar todos los coeficientes, se añaden. Se colectan datos y se vuelve a realizar el análisis. Sin embargo, si no se rechaza la hipótesis se puede inferir que la superficie es plana. Una vez que se tiene la ecuación y se ha probado el ajuste se buscan niveles que mejoren los valores de respuesta.

### 7.4.3. Máxima pendiente en ascenso

Frecuentemente, la estimación inicial de condiciones de operación óptimas está alejada del óptimo real, pues en este caso se desea mover rápidamente a la vecindad del óptimo. El método de máxima pendiente en ascenso es un procedimiento para recorrer secuencialmente la trayectoria de máxima pendiente, que conduce al máximo aumento de respuesta. Cuando desea minimización se trata de mínima pendiente en descenso.

De acuerdo con Montgomery (2012), la dirección de ascenso máximo es donde  $\hat{Y}$  aumenta más rápido y es paralela a la normal de la superficie de respuesta ajustada. Los incrementos a lo largo de su trayectoria son proporcionales a coeficientes de regresión  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ .

Los experimentos se hacen hasta que deje de observarse un incremento en la respuesta. Entonces, se ajusta un nuevo modelo de primer orden con el que se determina una nueva trayectoria y se sigue con el procedimiento. Por último, se consigue llegar a la cercanía del óptimo, que ocurre cuando existe falta de ajuste del modelo de primer orden.

### 7.4.4. Algoritmo que determina coordenadas de un punto en trayectoria de máxima pendiente en ascenso

Un algoritmo propuesto por Montgomery (2012) es, suponiendo que punto  $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = \dots = X_k = 0$ :

1. Se elige un tamaño de incremento o “escalón” en una de las variables del proceso, como  $\Delta X_j$ , se elige usualmente la variable que más se conoce o la que tiene mayor coeficiente de regresión absoluto  $|\beta_j|$ .
2. El tamaño de incremento en otras variables es:

$$\Delta X_j = \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\beta}_j / \Delta X_j}$$

Donde,  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, k$  e  $i \neq j$

Se convierte  $\Delta X_j$  de variables codificadas a variables naturales.

Ejemplo (Montgomery, 2012):

Un Ingeniero Agroindustrial desea determinar las condiciones de operación que maximicen el rendimiento de una acción. El tiempo y la temperatura son dos variables controlables que influyen. Actualmente, el proceso opera con un tiempo de reacción de 35 minutos y temperatura de 155°F, produciendo un rendimiento de 40 %. El ingeniero decide que la región de exploración sea (30,40) minutos de reacción y (150,160)°F. Para simplificar los cálculos, las variables independientes o exógenas se codifican en intervalo (-1,1).

Las variables codificadas son:

$$X_1 = \frac{(\varepsilon_1 - 35)}{5}$$

$$X_2 = \frac{(\varepsilon_2 - 155)}{5}$$

Donde,  $\varepsilon_1$  es variable natural tiempo y  $\varepsilon_2$  es variable natural temperatura. En la tabla 16 se muestran los datos, se usa un diseño factorial  $2^k$  aumentando en cinco puntos centrales. Las observaciones centrales sirven para estimar el error experimental y permiten probar la adecuación del modelo de primer orden:

Tabla 16 Datos del proceso para ajustar a un modelo de primer orden

Datos del proceso para ajustar a un modelo de primer orden				
Variables Naturales		Variables Codificadas		Respuesta
$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$X_1$	$X_2$	$Y$
30	150	-1	-1	39,3
30	160	-1	1	40,0
40	150	1	-1	40,9
40	160	1	1	41,5
35	155	0	0	40,3
35	155	0	0	40,5
35	155	0	0	40,7
35	155	0	0	40,2
35	155	0	0	40,6

Con el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios se obtiene:

$$\hat{Y} = 40.44 + 0.775 X_1 + 0.325 X_2$$

En la tabla 17 se muestra el Análisis de Varianza, siendo F de regresión global altamente significativa:

Tabla 17 Análisis de Varianza o ANOVA

Análisis de Varianza o ANOVA					
F. de V (Factor de Variación) o VF (Variation factor)	Gl (Grados de Libertad) o Df (Degrees of freedom)	SC (Suma de Cuadrados) o Sum Sq (Sum of square)	CM (Cuadrado Medio) o Mean Sq (Mean squares)	F (calculada) o F value (Calculated F)	R <sup>2</sup>
Total	$N - 1 = 8$	$SST = \sum_{u=1}^N (Y_u - \bar{Y})^2$ = 3,0022			
Regresión ( $\beta_1, \beta_2$ )	$p - 1 = 2$	$SSR = \sum_{u=1}^N (\hat{Y}_u - \bar{Y})^2$ = 2,8250	$SCR/p - 1 = 1,4125$	$\frac{C, M_r \text{Regresión}}{C, M_r \text{Residuo}} = 47,83$	$\frac{SSR}{SST} = 94,09 \%$
Residuo (Falta de ajuste)	$N - p = 6$	$SSE = \sum_{u=1}^N (Y_u - \hat{Y}_u)^2$ = 0,1772	$SCR/N - p$ = 0,0026	= 0,06	
(Error puro)	2 4	= 0,0052 = 0,1720	= 0,0430		

Fuente: Elaboración propia con base en modificaciones de González, B. G. (2010) y Hurtado, M. J. & Gómez, F. R. (2010)

El modelo indica desplazamiento de 0,775 unidades en dirección  $X_1$  por cada 0,325 unidades en dirección  $X_2$ . Se sabe que la trayectoria pasa por el punto  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = 0$  y tiene pendiente  $0,325/0,775 = 41,94 \%$ . En este ejemplo, se decide usar 5 minutos como incremento en tiempo de reacción, equivalente a variable codificada  $\Delta X_1=1$ . Los incrementos a lo largo de la trayectoria son  $\Delta X_1=1$ ,  $\Delta X_2 = 0,325/0,775 = 0,42$ .

El ingeniero calcula cada punto en su trayectoria y observa el rendimiento en cada uno hasta notar un decremento en su respuesta. Los resultados aparecen en la tabla 18. Los incrementos se muestran tanto para variables codificadas como naturales. Esto se debe a que las codificadas son más fáciles de manejar matemáticamente y las naturales son las usadas en llevar a cabo el proceso:

Tabla 18 Experimento de máximo ascenso

Experimento de máximo ascenso					
Incrementos	Variables Codificadas		Variables Naturales		Respuesta
	$X_1$	$X_2$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	Y
Origen	0	0	35	155	
$\Delta$	1,00	0,42	5	2	
Origen+ $\Delta$	1,00	0,42	40	157	41,00
Origen+2 $\Delta$	2,00	0,84	45	159	42,90
Origen+3 $\Delta$	3,00	1,26	50	161	47,10
Origen+4 $\Delta$	4,00	1,68	55	163	49,70
Origen+5 $\Delta$	5,0	2,10	60	165	53,80
Origen+6 $\Delta$	6,0	2,52	65	167	59,90
Origen+7 $\Delta$	7,0	2,94	70	169	65,00
Origen+8 $\Delta$	8,0	3,36	75	171	70,40
Origen+9 $\Delta$	9,00	3,78	80	173	77,60
Origen+10 $\Delta$	10,00	4,23	85	175	80,30
Origen+11 $\Delta$	11,00	4,62	90	177	76,20
Origen+12 $\Delta$	12,00	5,04	95	179	75,10

Se observa un aumento en respuesta hasta el décimo incremento. A partir del undécimo se produce un decremento en rendimiento. Por lo tanto, se debe ajustar otro modelo de primer orden en su cercanía del punto ( $\varepsilon_1 = 85$ ,  $\varepsilon_2 = 175$ ). La región explorada para  $\varepsilon_1$  es (80,90) y para  $\varepsilon_2$  es (170,180). Las variables codificadas son:

$$X_1 = \frac{(\varepsilon_1 - 85)}{5}$$

$$X_2 = \frac{(\varepsilon_2 - 175)}{5}$$

Nuevamente, se usa un diseño factorial  $2^k$ . Los datos son:

Tabla 19 Datos del proceso para segundo modelo de primer orden

Datos del proceso para segundo modelo de primer orden				
Variables Naturales		Variables Codificadas		Respuesta
$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$X_1$	$X_2$	$Y$
80	170	-1	-1	76,5
80	180	-1	1	77,0
90	170	1	-1	78,0
90	180	1	1	79,5
85	175	0	0	79,9
85	175	0	0	80,3
85	175	0	0	80,0
85	175	0	0	79,7
85	175	0	0	79,8

Con el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios, el modelo de primer orden ajustado es:

$$\hat{Y} = 78,97 + 1,00 X_1 + 0,500 X_2$$

En la tabla 20 se presenta su ANOVA:

Tabla 20 Análisis de Varianza o ANOVA

Análisis de Varianza o ANOVA					
F. de V (Factor de Variación) o VF (Variation factor)	GL (Grados de Libertad) o Df (Degrees of freedom)	SC (Suma de Cuadrados) o Sum Sq (Sum of square)	CM (Cuadrado Medio) o Mean Sq (Mean squares)	F (calculada) o F value (Calculated F)	R <sup>2</sup>
Total	$N - 1 = 8$	$SST = \sum_{u=1}^N (Y_u - \bar{Y})^2$ = 16,1200			
Regresión ( $\beta_1, \beta_2$ )	$p - 1 = 2$	$SSR = \sum_{u=1}^N (\hat{Y}_u - \bar{Y})^2$ = 5,0000	$SCR/p - 1 = 2,5000$	$\frac{C, M_{Regresión}}{C, M_{Residuo}} = 1,35$	$\frac{SSR}{SST}$ = 31,02 %
Residuo (Falta de ajuste)	$N - p = 6$	$SSE = \sum_{u=1}^N (Y_u - \hat{Y}_u)^2$ = 11,1200	$SCR/N - p$ = 5,507	= 102,91	
(Error puro)	2 4	= 10,9080 = 0,2120	= 5,4540 = 0,0530		

Fuente: Elaboración propia con base en modificaciones de González, B. G. (2010) y Hurtado, M. J. & Gómez, F. R. (2010)



El resultado de prueba de falta de ajuste implica que el modelo de primer orden no es una aproximación adecuada, por lo que se trata de una superficie con curvatura y se logra llegar a la cercanía del óptimo.

## 4.8. POLINOMIO DE SEGUNDO ORDEN

El modelo de segundo orden es:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon$$

En este modelo,  $\beta_i$  son coeficientes de regresión para términos de primer orden,  $\beta_{ii}$  son coeficientes para términos cuadráticos puros,  $\beta_{ij}$  son coeficientes para términos de producto cruzado o cruz y  $\varepsilon$  es el término error aleatorio. Los términos cuadráticos puros y cruzados son de segundo orden.

El número de términos en ecuación está dado por:

$$\rho = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Los parámetros del modelo se estiman mediante Método de Mínimos Cuadrados. Una vez que se tienen estimadores se sustituyen en ecuación para obtener el modelo ajustado en el vecindario del valor óptimo de respuesta:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} X_i^2 + \sum_{i < j}^k b_{ij} X_i X_j$$

La significancia de coeficientes estimados y su ajuste del modelo se prueban con estadístico *F de Fisher Snedecor*. Una vez verificado si el modelo tiene suficiencia de ajuste y los coeficientes son significativos, se procede a localizar las coordenadas del “punto estacionario” y se analiza detalladamente su sistema de respuesta.

### 4.8.1. Localización de punto estacionario

De acuerdo con Montgomery (2012) y en caso que exista un valor máximo, suponiendo que se desea maximizar la respuesta, será el conjunto:  $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = \dots = X_k$ .

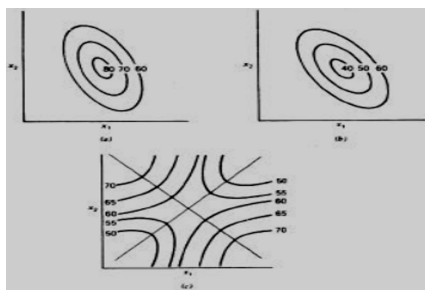
Tal que sus derivadas parciales son:

$$\frac{\delta \hat{y}}{\delta X_1} = \frac{\delta \hat{y}}{\delta X_2} = \frac{\delta \hat{y}}{\delta X_3} = \frac{\delta \hat{y}}{\delta X_4} = \dots = \frac{\delta \hat{y}}{\delta X_k} = 0$$

Donde, el punto  $(X_{1,0}, X_{2,0}, X_{3,0}, X_{4,0}, \dots, X_{k,0})$  se denomina “punto estacionario” y puede ser:

- a) Un punto de respuesta máxima.
- b) Un punto de respuesta mínima.
- c) Un punto silla (se ubica punto máximo y mínimo simultáneamente)

Figura 26 Localización de punto estacionario  
Fuente: Zill, D. G. & Wright, W. S. (2011)



Se puede obtener este punto usando notación matricial para modelo de segundo orden:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + X' b + X' B X$$

Donde:

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ M \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ M \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11}, & \frac{\hat{\beta}_{12}}{2}, & \dots, & \frac{\hat{\beta}_{1k}}{2} \\ \frac{\hat{\beta}_{21}}{2}, & \hat{\beta}_{22}, & \dots, & \frac{\hat{\beta}_{2k}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{\beta}_{k1}}{2}, & \frac{\hat{\beta}_{k2}}{2}, & \dots, & \hat{\beta}_{kk} \end{bmatrix}$$

Donde, b es vector  $(k*1)$  de coeficientes de regresión de primer orden, B es una matriz simétrica  $(k*k)$ , cuya diagonal principal está formada por los coeficientes de los términos cuadráticos puros  $(\hat{\beta}_{ii})$  y elementos fuera de esta corresponden a un medio del valor de los coeficientes cuadráticos mixtos  $(\hat{\beta}_{ij}, i \neq j)$ . La derivada de  $\hat{Y}$  respecto a vector X igualada a cero es:

$$\frac{\delta \hat{Y}}{\delta X} = b + 2BX = 0$$

Tal que, el punto estacionario es la solución de esta ecuación:

$$X_0 = -\frac{1}{2}B^{-1}b$$

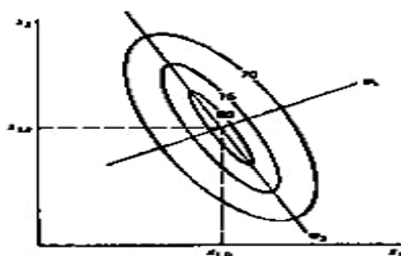
Se sustituye está en la ecuación matricial para el modelo de segundo orden:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \frac{1}{2}X_0'b$$

### 4.8.2. Caracterización de la superficie de respuesta

Hallado el punto estacionario, se caracteriza la superficie de respuesta. Es decir, se determina si se trata de un punto de respuesta máximo, mínimo o silla (se ubica el punto máximo y mínimo simultáneamente). La forma directa de hacerlo es mediante la gráfica de contornos del modelo ajustado; sin embargo, un análisis más formal es útil.

Como alternativa se puede expresar la forma de la superficie de respuesta usando un nuevo conjunto de variables  $W_1, W_2, W_3, W_4, \dots, W_k$ , cuyos ejes representan ejes principales de superficie de respuesta, interpretados en el punto estacionario como:



Fuente: Zill, D. G. & Wright, W. S. (2011)

Esta da como resultado el modelo ajustado llamado “forma canónica”:

$$\hat{Y} = \hat{Y}_0 + \lambda_1 W_1^2 + \lambda_2 W_2^2 + \lambda_3 W_3^2 + \lambda_4 W_4^2 + \dots + \lambda_k W_k^2$$

Donde,  $W_i$  son variables independientes transformadas y  $\lambda_k$  son constantes o valores propios, también conocidos como raíces características, auto valores o valores tomados de matriz B.

La naturaleza de superficie de respuesta puede determinarse a partir del punto estacionario, el signo y magnitud de  $\lambda_i$ . Si todas las  $\lambda_i$  son positivas se puede to-

mar como un punto de respuesta mínima, si todas las  $\lambda_i$  son negativas es un punto de respuesta máxima y si las  $\lambda_i$  tienen signos distintos es un punto de respuesta silla (se ubica punto máximo y mínimo simultáneamente).

La Estimación de Superficies de Respuesta en Diseños Experimentales se basa en el cálculo de “Sólidos Simples”, cuyo bosquejo gráfico se establece mediante rectas o curvas de intersección entre superficies que limitan al sólido y que deben cumplir con las siguientes características:

- Poseen una frontera (superficies limitantes)
- Tienen dos curvas.
- No tienen hoyos, tienen borde y no tienen traslapes.
- En su interior no deben tener superficies.

Cuando dos superficies se intersecan forman una curva  $\mathbb{C}$  o generan una curva, que se parametriza  $\mathbb{C}$ .

#### Ejercicio 4.22.

Sean las superficies en I Octante  $\left\{ \begin{matrix} S_1: z = 1 - x^2 \\ S_2: y = 3 \end{matrix} \right\} > n$ .

Halle la curva de intersección  $\mathbb{C}$  tal que  $z = 1 - x^2$  (parábola que genera un cilindro), mientras que  $y = 3$  (recta que genera un plano). Si se da valores a la parábola será:

x	y
0	1
$\pm 1$	0

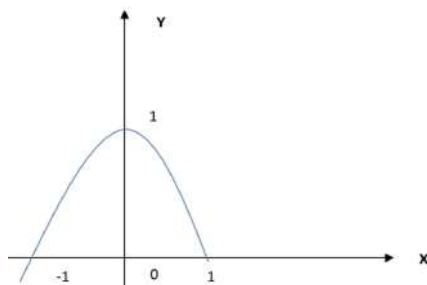
Si  $y = 1 - x^2$  tal que si  $\delta(y) = \delta(ax^2 + bx + c) \Rightarrow V_x = -\frac{b}{2a} y V_y = ?$ .

Por lo que,  $V_x = 0 \Rightarrow V_y = 1$ .

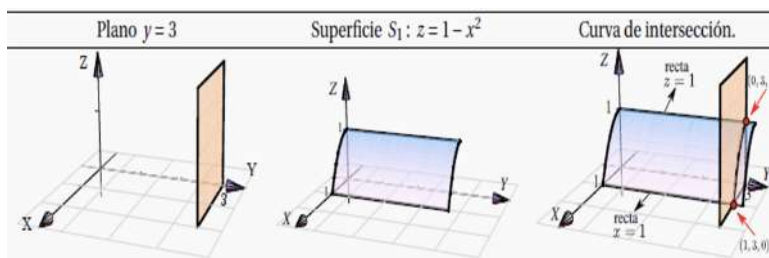
Por lo que,  $0 = 1 - x^2$

$\therefore x_{(1-2)} = \pm\sqrt{1}$ .

Entonces,  $x_1 = 1$  y  $x_2 = -1$ .



Fuente: Mora, F. W. (2019)



Fuente: Mora, F. W. (2019)

Sea:  $x = t$ ;  $y = 3$ ;  $z = 1 - x^2$  y  $z = 1 - t^2$ .

Donde:  $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3 \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}$  tal que  $t \in [0, 1]$ .

#### Ejercicio 4.23.

Sea  $\mathbf{c} = \left\{ \begin{matrix} S_1: z = 4 - \frac{x^2}{4} \\ S_2: x + y = 6 \end{matrix} \right\} > n$ .

Tal que si  $y = 6 - x$  es una recta, entonces:

x	y
0	6
6	0

Simultáneamente, si  $z = -\frac{x^2}{4} + 4$  es una parábola

$$\Rightarrow -\frac{x^2}{4} + 4 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 = -16$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{16}$$

$$x_1 = 4 \text{ y } x_2 = -4:$$

x	y
0	4
$\pm 4$	0

Como la forma general de una parábola es  $y = ax^2 + bx + c$  implica que su derivada es  $2ax + b = 0 \Rightarrow V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{-\frac{1}{4}} = 0$ .

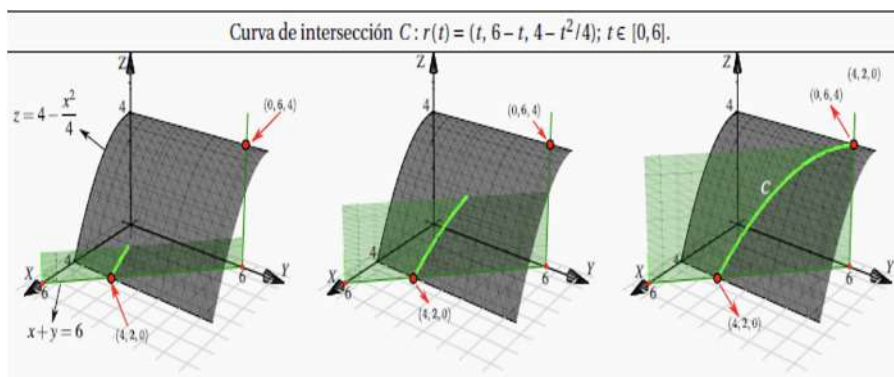
Entonces,  $z = -\frac{(0)^2}{4} + 4 = 4$ .

Si se sustituye este valor en ecuación  $z = -\frac{(4)^2}{4} + 4 = 0$ .

Por lo tanto, si se sustituye en valor positivo de  $x$  en la ecuación  $y = 6 - x = 6 - 4 = 2$ .

Si  $x = t \Rightarrow y = 6 - t$ .

Donde:  $r(t) = \begin{pmatrix} t \\ 6 - t \\ 4 - \frac{t^2}{4} \end{pmatrix}$  tal que  $t \in [0, 6]$ :



Fuente: Mora, F. W. (2019)

Ejemplo c:

Sea  $\mathbb{C} = \left\{ \begin{matrix} S_1: x^2 + z^2 = 9 \\ S_2: y - x = -2 \end{matrix} \right\} > n$ .

Tal que,  $x^2 + z^2 = 9$  es la ecuación que genera un cilindro y  $y - x = -2$  es ecuación de una recta que genera un plano.

Entonces, si  $x^2 + z^2 = 9 \Rightarrow x^2 + z^2 = (r = 3)^2$ .

Por lo tanto:

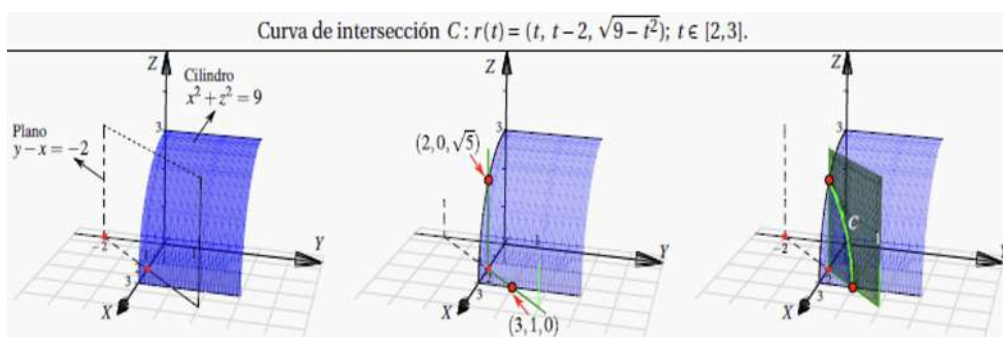
x	y
0	3
3	0

En el caso de  $y - x = -2$  implica:

x	y
0	-2
2	0

Si  $x = t$  en  $y - x = -2 \Rightarrow y = -2 + t$ , en caso  $x^2 + z^2 = 9 \Rightarrow z = \sqrt{9 - t^2}$ .

Donde:  $r(t) = \begin{pmatrix} t \\ -2 + t \\ \sqrt{9 - t^2} \end{pmatrix}$  tal que  $t \in [2, 3]$ :



Fuente: Mora, F. W. (2019)

#### Ejercicio 4.24.

Sea  $\mathbb{C} = \left\{ \begin{matrix} S_1: x^2 + y^2 = 1 \\ S_2: x - z^2 = 0 \end{matrix} \right\} > n$ .

Tal que,  $x^2 + z^2 = 1$  es la ecuación de circunferencia que genera un cilindro y  $x - z^2 = 0$  es ecuación de una parábola que genera un plano.

Entonces, si  $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = (r = 1)^2$ .

Por lo tanto:

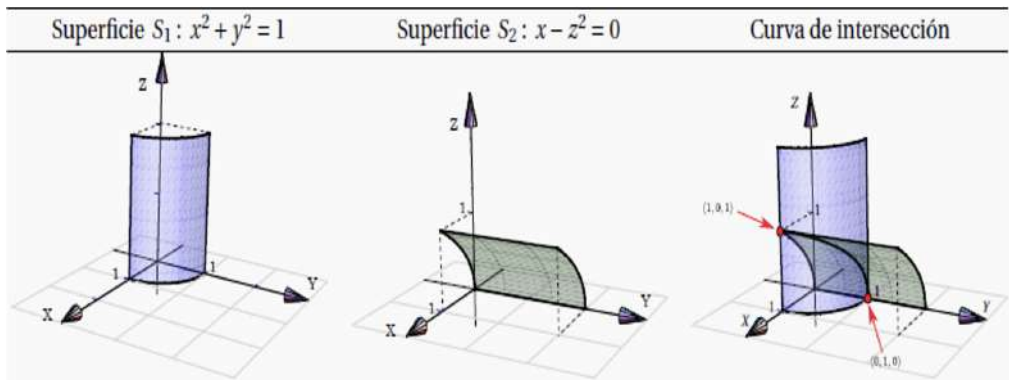
x	y
0	$\pm 1$
$\pm 1$	0

En el caso de  $x - z^2 = 0$  implica:

x	y
0	$\pm\sqrt{0}$
0	0
1	1

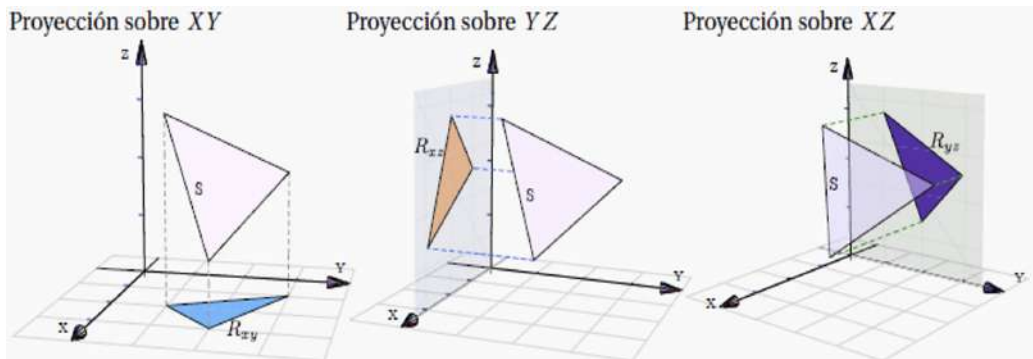
Si  $z = \pm\sqrt{x}$ ,  $x = \cos t$  y  $y = \sin t$  en  $x^2 + y^2 = 1$ .

Donde:  $r(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \pm\sqrt{\cos t} \end{pmatrix}$  tal que  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ :



Fuente: Mora, F. W. (2019)

La Proyección Ortogonal de un Sólido Simple puede ser mediante proyección de un punto, representada por “su sombra” al trazar una recta perpendicular sobre el plano coordenado  $XY$ ,  $YZ$  y/o  $XZ$ , o proyección de una superficie, entendida como una proyección perpendicular de una superficie o proyección de cada uno de sus puntos sobre un plano  $(II)$  coordenado  $XY$ ,  $YZ$  y/o  $XZ$ :



Fuente: Mora, F. W. (2019)



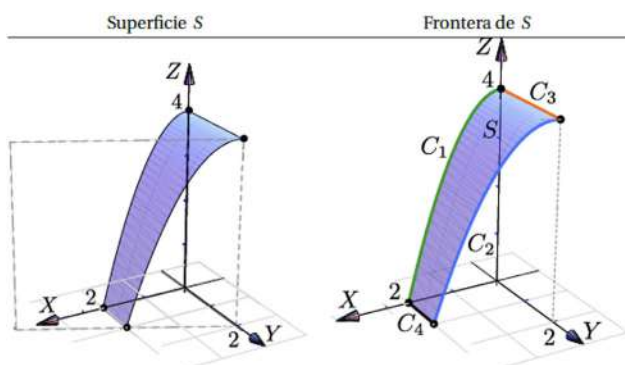
Ejercicio 4.25.

Sea  $S: z = 4 - x^2$  una parábola que genera una superficie y el plano coordenado  $\Pi: x + 2y = 4$  una recta que genera un plano. Dibuje y encuentre las proyecciones sobre los planos  $XY$  y  $YZ$ , respectivamente.  $z = 4 - x^2$  implica que  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  son “Curvas Fronteras” debido a que:

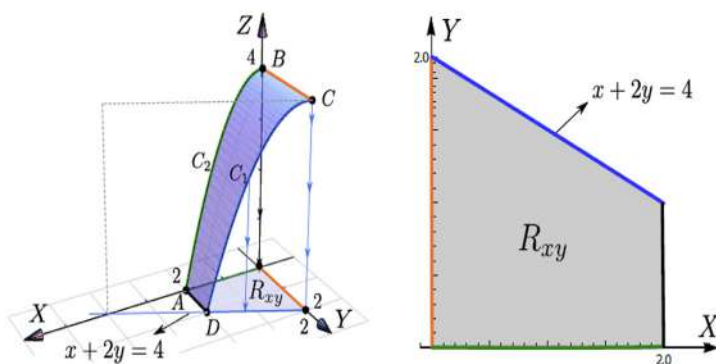
x	y
0	4
$\pm 2$	0

En  $x + 2y = 4$  indica:

x	y
0	2
4	0
2	1



Fuente: Mora, F. W. (2019)



Fuente: Mora, F. W. (2019)

La Proyección YZ implica  $R_{yz} = \begin{cases} z = 4 - x^2 \\ 4 = x + 2y \end{cases}$

Tal que si  $x = 4 - 2y$  se reemplaza en  $z = 4 - x^2$  es:

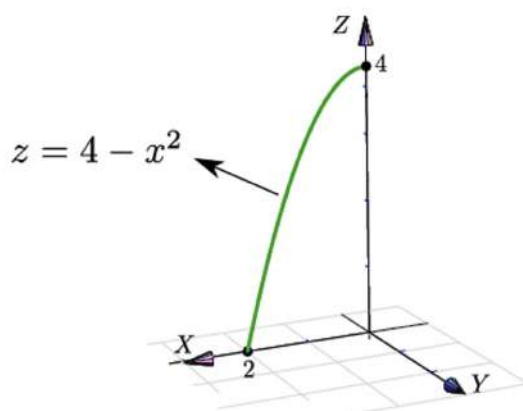
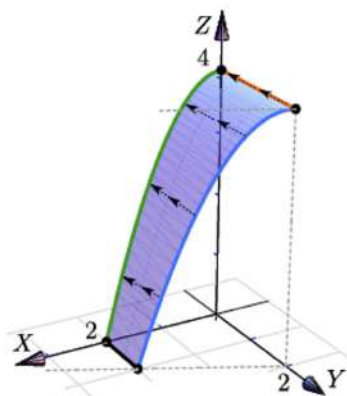
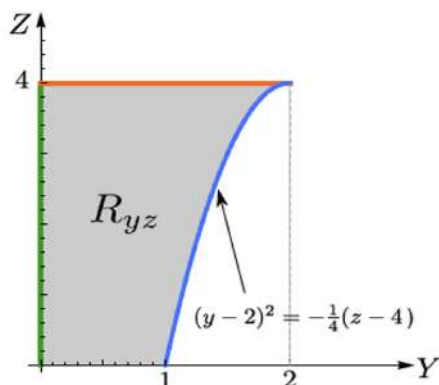
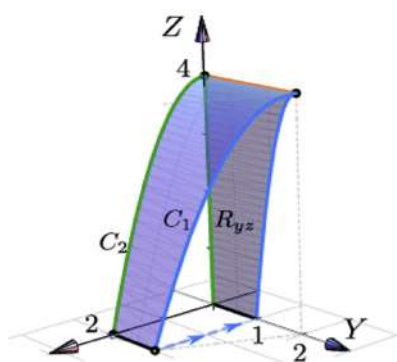
$$z = 4 - (4 - 2y)^2 = 4 - [2(2 - y)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{z}{4} = \frac{4}{4} - \frac{[2^2(2 - y)^2]}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{4} - 1 = -[-(y - 2)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{z - 4}{4} = -(y - 2)^2$$

$$\therefore (y - 2)^2 = -\frac{z - 4}{4}$$



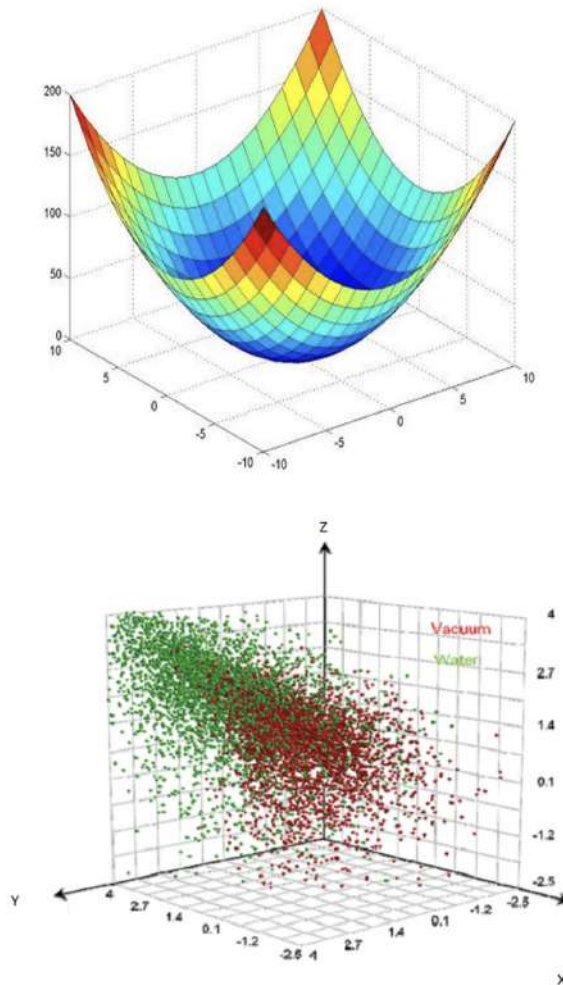
Fuente: Mora, F. W. (2019)

Sin embargo, la representación gráfica de una  $f(x)$  en superficies de respuesta con más de dos variables corresponde a la representación de todos los puntos  $(x,y,z)$  que satisfacen ecuación  $z = f(x,y)$ ,  $f(x,y)$  o  $F(x,y,z) = 0$ .

Por lo tanto, la relación  $Y = f(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k)$  entre  $Y$  y niveles de  $K$  factores ( $\varepsilon: \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_k$ ) representa una superficie con  $K$  factores, la superficie está en  $K+2$  dimensiones.

### Ejercicio 4.26.

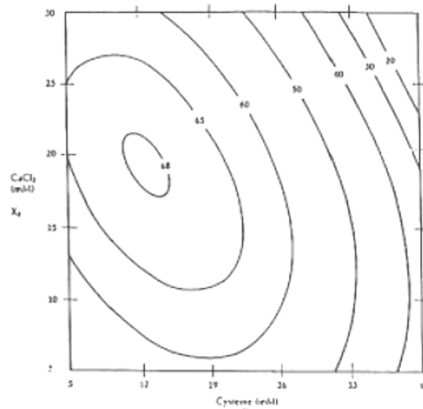
Si se tiene  $Y = f(X_1, X_2)$ , la superficie está en tres dimensiones:



Fuente: Mora, F. W. (2019)

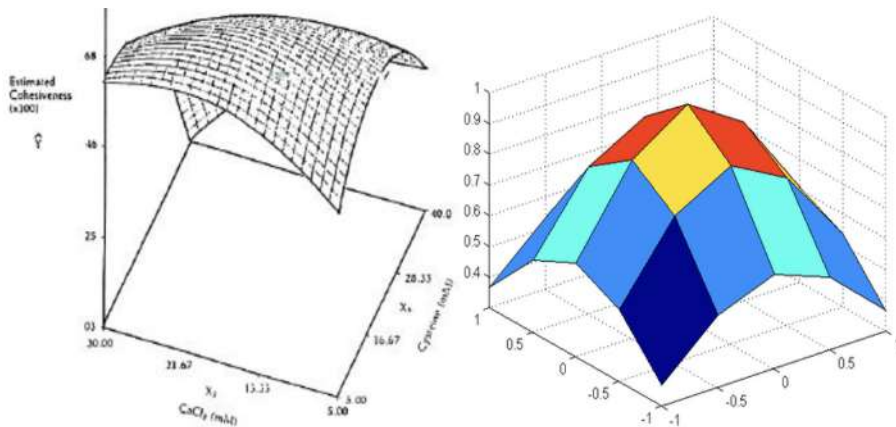
La gráfica de contornos facilita la visualización en forma de una superficie de respuesta en tres dimensiones. Las curvas de valores iguales de respuesta se grafican en un plano donde los ejes coordenados representan niveles de factores. Cada curva representa un valor de altura de superficie; es decir, un valor específico  $\hat{Y}$ .

Éste tipo de gráfica facilita enfocar en niveles de factores en que ocurre un cambio en altura de superficie:



Fuente: Mora, F. W. (2019)

La región experimental especifica una zona de valores para niveles de factores. Se puede emplear en niveles actuales de operación para cada factor, pues si se desea explorar el vecindario se incrementa y/o disminuye el valor del nivel en una cantidad determinada:



Fuente: Mora, F. W. (2019)

### 4.8.3. Metodología de superficie de respuesta

Los modelos de superficie de respuesta (*Surface Methodology-RMS o MSR*), propuestos por Box y Wilso en 1950, han sido aplicados con éxito a disciplinas tan diversas como Agricultura, Agronomía, Agroindustrias (productos alimenticios), forestal, investigaciones biológicas, etcétera. Sus bases se derivan de la teoría del modelo lineal general, supone que existe una variable de respuesta, explicada, endógena que depende de variables independientes, explicativas o exógenas cuantitativas mediante una función ( $f$ ) que puede ser muy complicada o desconocida. Su función usualmente se aproxima en región de interés por un polinomio de orden bajo, generalmente menor o igual a tres.

La metodología de superficie de respuesta, MSR, *Surface Methodology*, RMS o MSR, es una colección de técnicas matemáticas y estadísticas útiles en modelado y análisis de problemas en que una respuesta de interés recibe la influencia de diversas variables, donde el objetivo es optimizar esta respuesta. El valor real esperado ( $\eta$ ) que toma la variable de interés considerada como influida por niveles de  $k$  factores cuantitativos ( $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n$ ) que significa existencia de alguna función  $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n$ , suponiendo es continua en  $X_i \forall_i = 1, 2, 3, 4, \dots, k$  que estima el valor  $\eta$  para alguna combinación dada de niveles:

$$\eta = f((X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n))$$

Tal que, la variable respuesta puede expresarse como:

$$Y = \eta + \varepsilon = f(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n) + \varepsilon$$

$\varepsilon$ : Ruido o error en respuesta  $Y$

Si la respuesta esperada se denota por:

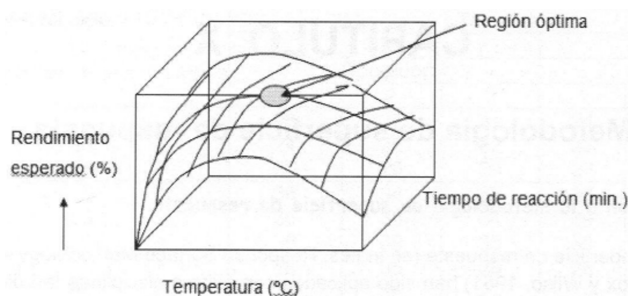
$$E(y) = \eta + \varepsilon = f(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n) + \varepsilon$$

Entonces, la superficie representada por la siguiente ecuación se llama Superficie de Respuesta:

$$\eta = f(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n)$$

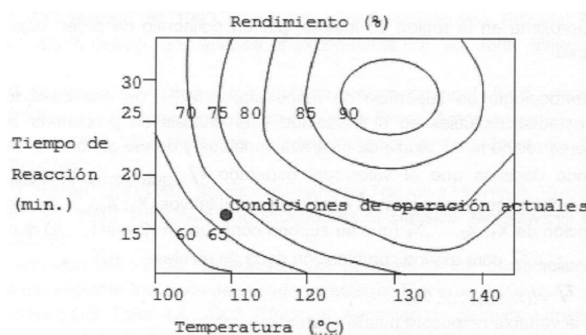
Suponga que un investigador desea obtener el máximo rendimiento en un proceso ( $y$ ) que tiene como variables relevantes la temperatura de reacción ( $x_1$ )

y tiempo de reacción ( $x_2$ ). Matemáticamente,  $Y = X_1 + X_2 + \varepsilon$  ó  $\eta = f(X_1, X_2)$ , es mediante  $\mathbb{R}^2$ :



Fuente: Mora, F. W. (2019)

En gráfica de contornos de superficie de respuesta es:



Fuente: Mora, F. W. (2019)

## 4.9. DISEÑOS EXPERIMENTALES PARA AJUSTAR SUPERFICIES DE RESPUESTA

El ajuste y análisis de una superficie de respuesta se facilita con la elección apropiada de un diseño experimental. Entendido como diseño el conjunto específico de combinaciones de niveles de  $K$  variables al realizar el experimento.

### 4.9.1. Modelos o polinomios de primer orden

Generalmente, de acuerdo con Vásquez (2014), se desconoce la relación entre la variable respuesta, explicada o endógena y variables independientes, explicati-

vas o exógenas; por lo tanto, un modelo que aproxime la relación funcional entre  $Y$  y  $X_i$  es requerido. Su representación matemática, modelos MSR, puede ser de diversas maneras:

**1. Modelo de primer orden (lineal) sin interacciones o productos cruzados:**

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon$$

Donde:

$X_i, X_j, X_{ij}, Y, \hat{Y}$ : variables endógenas

$\beta_0, \beta_i$ : parámetros desconocidos

$\beta_{ii}, \beta_{ij}$ : parámetro interacción desconocido

$b_i, b_0$ : estimadores desconocidos

, o matricialmente  $Y = X\beta + \varepsilon$  tal que la matriz  $X$  puede escribirse como  $X = [1:D]$ , con  $D$  la matriz de combinaciones de niveles de factores, llamada Matriz Diseño.

Si la matriz  $X$  es de rango completo, el estimador de  $\beta$  ( $\hat{\beta}$ ) obtenido por método de mínimos cuadrados es  $b = (X'X)^{-1} X'Y$ , considerado MELI de  $\beta$  y matriz varianza-covarianza de  $b$  es dada por  $\text{Var}(b) = (X'X)^{-1} * \sigma^2$ .

Entonces, el modelo de primer orden ajustado es:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i$$

Si el modelo está bien ajustado, su parte no aleatoria (no estocástica) representa la respuesta real esperada y  $\varepsilon$  es el error experimental. No obstante, si el modelo no está ajustado a la función respuesta real sucede que la relación entre respuesta y factores está demasiado simplificada e, incluso,  $\varepsilon$  contiene el error experimental y una parte del error no aleatorio debido a su falta de ajuste.

**2. Modelo lineal de primer orden con interacciones:**

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon$$

### 3. Modelo cuadrático o de segundo orden:

Este modelo se presenta si existe curvatura en la superficie de respuesta, pues el modelo de primer orden no es una aproximación adecuada y, en consecuencia, es necesario usar un modelo de segundo orden, que ajusta mejor, con  $k$  factores,  $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k$ :

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \varepsilon$$

En modelos de superficie de respuesta se supone que la variable  $Y$  está en función de niveles de factores cuantitativos representados por variables  $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_k$ .

Los modelos polinomiales se usan como aproximación a la función de respuesta real y, generalmente, son buenas aproximaciones cuando se trabaja en pequeñas zonas de factores cuantitativos. Por lo tanto, cuando se trabaja con dos factores el modelo lineal ajustado de primer orden es:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$$

Donde:

$\hat{Y}$ : estimador variable endógena

$X_1, X_2$ : variables exógenas

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ : estimadores de parámetros desconocidos

Si este modelo es uno de segundo orden, su modelo ajustado es:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_{11} X_1^2 + \hat{\beta}_{12} X_2^2 + \hat{\beta}_{12} X_1 X_2$$

Donde:

$\hat{Y}$ : estimador variable endógena

$X_1, X_2$ : variables exógenas

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{12}$ : estimadores de parámetros desconocidos

Debido a la curvatura de la superficie real, el experimentador requiere un modelo cuyo grado sea  $\geq 2$  con el objeto de aproximar la respuesta cuando se



encuentra relativamente cercana al óptimo. Usualmente, el modelo de segundo orden de la ecuación anterior es adecuado.

El análisis del error en el modelo ajustado indica que para estimar los coeficientes se requieren  $N \geq k + 1$  valores de respuesta de la variable respuesta, explicada o endógena ( $Y$ ). El análisis de datos se suele representar en una tabla de análisis de varianza.

La variación total recibe el nombre de suma de cuadrados total:

$$\left( SST = \sum_{u=1}^N (Y_u - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 \right)$$

, donde  $Y_u$  ó  $Y_i$  es valor observado en  $i$ -ésima muestra.

La suma de cuadrados por regresión es  $SSR = \sum_{u=1}^N (\hat{Y}_u - \bar{Y})^2 = \sum_{u=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$  y, finalmente, la suma de cuadrados residual es:

$$SSE = \sum_{u=1}^N (Y_u - \hat{Y}_u)^2 = \sum_{u=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y}_u)^2.$$

Se puede hacer un análisis del ajuste con  $\mathbb{R}^2$ , proporción total de variación de las  $Y_i$  respecto a la media que se puede explicar con la ecuación de regresión ajustada:

$$\mathbb{R}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (\hat{Y}_u - \bar{Y})^2}{\sum_{u=1}^N (Y_u - \bar{Y})^2} = \frac{SSR(\text{Regresión})}{SST(\text{Total})}.$$

El esquema de elementos de superficie de respuesta, MSR, *Surface Methodology*, RMS o MSR implica tres aspectos:

- Diseño. Implica que para optimizar un proceso se debe aplicar el diseño de experimentos, en particular aquellos que sirven para ajustar un modelo de regresión lineal múltiple.
- Modelo. Usa el análisis de regresión lineal múltiple, junto con sus elementos básicos: parámetros del modelo, modelo ajustado, significancia del modelo, prueba de falta de ajuste, residuos, predichos, intervalos de confianza para predichos y coeficiente de determinación.
- Técnica de optimización. Está formado por algunas técnicas matemáticas que sirven dado un modelo ajustado explorarlo a fin de obtener información sobre el punto óptimo.

El diseño y modelo se piensa al mismo tiempo y depende del tipo de comportamiento que se espera en la respuesta.

A continuación, un esquema de metodología de superficie de respuesta, con tres etapas en búsqueda del punto óptimo:

- Cribado. La optimización de un proceso se inicia con esta etapa cuando muchos factores ( $k > 6$  u  $8$ ) influyen en la variable de interés. Por ejemplo: una máquina se puede manipular en 10 parámetros diferentes y se conoce como influye cada uno. Es recomendable correr un experimento para identificar los pocos factores que tienen mayor influencia.
- Búsqueda 1 o primer orden. Se aplica cuando se tienen pocos factores ( $k \leq 5$ ) y se sabe que influyen en la variable respuesta. Se corre un diseño de primer orden que permita caracterizar en forma preliminar el tipo de superficie de respuesta y detectar la presencia de curvatura. Comúnmente, un diseño factorial o fraccionario con repeticiones al centro se usa.
- Búsqueda 2 o segundo orden. Al momento en que se detecta la presencia de curvatura o, bien, la superficie es más complicada que un hiperplano<sup>8</sup>, se corre o completa un diseño de segundo orden para caracterizar mejor la superficie y modelar su curvatura.

Hurtado y Gómez (2010) afirman que al crecer el número de factores también crece rápido el número de tratamientos en diseños factoriales completos  $2^k$ , como  $k = 6$  factores una sola réplica del diseño factorial completo  $2^6$  implica correr 64 pruebas, correspondientes al número de tratamientos del diseño y, paralelamente, para  $2^7$  serían 128 puntos de diseño. En consecuencia, no es posible hacer tantas corridas experimentales, pues resultaría costoso e innecesario.

Por lo tanto, una estrategia que reduce de manera importante el número de puntos experimentales y, simultáneamente, controla que se pierda el mínimo de información valiosa consiste en construir diseños factoriales fraccionados que permiten reducir el número de corridas experimentales y obtener información acerca de efectos considerados de antemano relevantes tal que su jerarquización de efectos es que son más importantes efectos principales, luego interacciones dobles, después interacciones triples, interacciones cuádruples, etcétera.

Los diseños factoriales fraccionarios son  $2^{k-1}$ , como  $2^{(3-1)}$ ,  $2^{(k-2)}$ , por ejemplo:

---

<sup>8</sup> En geometría, un hiperplano es una extensión del concepto de plano. En un espacio unidimensional, como una recta, un hiperplano es un punto: divide una línea en dos líneas. En un espacio bidimensional, como el plano  $xy$ , un hiperplano es una recta: divide el plano en dos mitades.

$2^{(5-1)}$  o  $2^{(k-p)}$ , como  $2^{(7-4)}$ .

La figura 22 muestra la búsqueda 2 o de segundo orden.

Figura 27 Búsqueda 2 o segundo orden

cribado	búsqueda 1	búsqueda 2
Muchos factores	↑ Modelo de primer orden	↑ Modelo de segundo orden
↓	↑ ↓	↑ ↓
Resolución	↑ Diseño $2^k$ o $2^{k-p}$ con rep. al centro	↑ Realizar experimento
↓	↑ ↓	↑ ↓
Diseño factorial altamente fraccionado	↑ Realizar experimento	↑ Determinar el mejor Modelo jerárquico
↓	↑ ↓	↑ ↓
Realizar experimento	Estimar modelo y probar falta de ajuste	↑ Encontrar el punto estacionario
↓	↓	↓
Analizar los datos	↑ ¿es lineal el modelo? No →	Caracterizar la superficie
↓	↑ ↓ si	↓
Determinar efectos activos	↑ Moverse experimentando en la dirección óptima	¿Es el óptimo? ← no ↓ si
→	↑ ↓ ← Análisis de cordillera →	Condiciones óptimas

Fuente: Hurtado, M. J. & Gómez, F. R. (2010)

Diseños de Superficie de Respuesta implica que la elección adecuada del experimento a realizar es fundamental para modelar y explorar la superficie de respuesta usada para ajustar un modelo polinómico al conjunto de datos recogidos en puntos del diseño. Sería deseable que el diseño tuviera la mayor cantidad posible de estas características útiles al experimento, pues algunas son conflictivas entre sí:

- Generar una distribución razonable de puntos y, por tanto, información en toda la región de interés, usando el menor número posible de puntos experimentales.
- Asegurar que para cada punto  $x$  el valor ajustado  $Y(x)$  está tan cerca como sea posible del valor real,  $Y(x)$ .
- Permitir detectar la falta de ajuste en el modelo.
- Permitir la ejecución de experimentos en bloques.
- Concebir la construcción secuencial de diseños de orden creciente.

- Ofrecer la estimación interna de varianza del error.
- Asegurar la simplicidad en los cálculos de estimadores de los parámetros del modelo.

Complementariamente, una clase de diseños que minimizan la varianza de los coeficientes de regresión ( $\hat{\beta}_i$ ) son los Diseños Ortogonales de Primer Orden. Por lo tanto, Ortogonalidad indica que los elementos fuera de la diagonal de la matriz  $(X'X)$  equivalen a 0, que implica que los productos cruzados de las columnas de la matriz  $X$  son igual a 0.

En esta clase de Diseños Ortogonales de primer orden incluyen:

#### 4.9.2. Diseños factoriales $2^k$

Indica que se estimará el efecto que sobre la característica de calidad presentan  $K$  factores, cada uno probado en dos niveles y se codifican a niveles estandarizados  $\pm 1$  (+1 más alto y  $-1$  más bajo) tal que se probarán  $2^k$  tratamientos. El diseño no permite estimar el error experimental a menos que se repitan los experimentos que, para lograrlo, se aumenta el diseño con observaciones en el centro. La adición de puntos centrales no tiene influencia sobre las  $\hat{\beta}_i$  con  $i \geq 1$ , pero la estimación de  $\beta_0$  es el promedio general de todas sus observaciones.

Los diseños fraccionarios  $2^{k-p}$  indican que se estimará el efecto que sobre la característica de calidad presenta  $K$  factores; aunque no se probarán todos los  $2^k$  posibles tratamientos, sino el número de tratamientos se reduce a  $2^{k-p}$ , permitiendo estimar más efectos con un menor costo.

#### 4.9.3. Fracciones de serie $2^k$

Es una fracción de un diseño  $2^k$ . La fracción  $1/2$  se denota como  $2^{k-1}$ , pues contiene la mitad de combinaciones de un  $2^k$ , mientras que la fracción  $1/4$  se denota como  $2^{k-2}$  debido a que contiene la cuarta parte de combinaciones de un  $2^k$ . Sin embargo, las fracciones deben tener suficientes puntos para estimar  $K+1$  coeficientes.

Es importante señalar que al usar un diseño  $2^{k-1}$  no se puede medir la posible falta de ajuste del modelo, salvo que se cuente con una estimación de varianza del error haciendo réplicas del punto central. Además, si el término  $X_i X_j X_l$  realmente existe, sesga la estimación del efecto principal asociado con  $X_k$ .

Finalmente, en programas experimentales se tienen dos razones para no realizar  $2^k$  combinaciones de un arreglo factorial completo:

1. A medida que el número de  $K$  factores se incrementa, crece rápidamente el número de combinaciones de niveles, haciéndose muy grande.
2. Sólo los primeros  $(K+1)$  términos del modelo definen la ecuación de un hiperplano. Los restantes  $2K - (K+1)$  términos, consistentes en productos cruzados, son una medida de distorsión del hiperplano.

#### 4.9.4. Diseños simplex

En este diseño, los puntos se localizan en vértices de una figura regular que tiene  $K+1$  vértices y está en  $K$  dimensiones. Para  $K = 2$ , la figura geométrica es un triángulo equilátero, entendida como una figura geométrica con lados-ángulos iguales y para  $K = 3$  es un tetraedro, es un poliedro de cuatro caras equivalente a un poliedro convexo con caras triangulares, encontrándose tres de ellas en cada vértice, pero si las cuatro caras del tetraedro son triángulos equiláteros, iguales entre sí, el tetraedro se denomina regular o simplex tridimensional, entendido como envoltura convexa de un conjunto de  $(n + 1)$  puntos independientes afines en un espacio euclídeo de dimensión  $n$  o mayor; es decir, el conjunto de puntos tal que ningún  $m$ -plano contiene más que  $(m + 1)$  de ellos, que están en posición general.

Como el número de puntos es igual al número de coeficientes del modelo se recomienda adicionar replicas en el punto central para que sea posible obtener la varianza del error y/o realizar la prueba de falta de ajuste.

#### 4.9.5. Diseños Plackett-Burman

Estos diseños son fracciones de arreglos factoriales  $2^k$ . Con este diseño, los coeficientes se estiman con máxima precisión en la tabla 21.

Tabla 21 Comparación de Diseños Ortogonales de Primer Orden

Comparación de Diseños Ortogonales de Primer Orden			
Diseño	No. de puntos	Ventajas	Desventajas
Factoriales $2^k$	$n = 2^k$		Requiere observaciones en centro. La estimación de $\beta_0$ es el promedio general de todas sus observaciones.
Fraciones de serie $2^k$	$n = 1/2$ de $2^k$ $n = 1/4$ de $2^k$	Contiene menos combinaciones que $2^k$ .	Requiere observaciones en centro. Si el termino $X_i X_j X_k$ existe sesga estimación del efecto principal asociado con $X_k$ .
Simplex	$n = K + 1$		
Plackett-Burman	$n = K + 1$ tal que n es múltiplo de 4	Los coeficientes se estiman con máxima precisión.	

La ecuación matemática de un modelo de primer orden con factores  $X_1$  y  $X_2$  es:

$$\mu_Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{12} X_1 X_2 + e$$

Donde:

$\mu_Y$ : Valor  $\bar{X}$  de variable respuesta o rendimiento

$\beta_0$ : Valor  $\bar{X}$  de respuesta en ausencia de efecto de factores  $X_1$  y  $X_2$

$\beta_1$ : Razón de cambio, efecto lineal, del factor 1 sobre respuesta  $\bar{X}$

$\beta_2$ : Razón de cambio, efecto lineal, del factor 2 sobre respuesta  $\bar{X}$

$\beta_{12}$ : Razón de cambio, efecto lineal, efecto de interacción entre  $X_1$  y  $X_2$  sobre respuesta  $\bar{X}$

$e$ : término error o efecto no explicado por modelo

Su objetivo principal de esta está en confirmar la influencia significativa de factores sobre la característica de calidad a optimizar, determinar la significancia

de interacciones entre dichos factores, estimar el modelo de regresión que describa el comportamiento del efecto de dichos factores y determinar en qué dirección se encuentran las condiciones más probables para optimizar la característica calidad.

Los niveles codificados de factores de un diseño factorial  $2^k$  son:

$$X_i = \frac{(A_{i \text{ (i-ésimo valor de Factor A)}} - \bar{A}_{(\text{Nivel } \bar{X} \text{ de Factor A)}})}{D_{\left(\frac{1}{2}(A_2 - A_1)\right)}}$$

El Método de Máxima Pendiente en Ascenso consiste en realizar una secuencia de experimentos a lo largo de la línea de máximo de respuesta. Si el modelo ajustado de primer orden es adecuado, la información que proporciona se usa en determinar una dirección en que se espere observar mayores valores de variable respuesta.

A medida que se avanza sobre la superficie ajustada en dirección en que se incrementan los valores de respuesta y se va llegando a una región en que se haya curvatura en superficie real, el incremento en respuesta se estabilizará en el punto más alto de la superficie ajustada. Si se continúa en esta dirección y la altura de superficie disminuye se realiza un nuevo conjunto de experimentos y se ajusta de nuevo el modelo de primer orden.

Se determina una nueva dirección hacia valores crecientes de respuesta y se ejecuta otra secuencia de experimentos en la dirección determinada. Este proceso continúa hasta que se haga evidente que a partir del método no se obtiene un incremento en respuesta o es muy pequeño.

Por lo tanto, el algoritmo determinante de las coordenadas de un punto en trayectoria de máxima pendiente en ascenso es (suponga que el punto  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_k = 0$ ):

1. Elige un tamaño de incremento o “escalón” en una de las variables del proceso, por ejemplo  $\Delta_j$ , usualmente se elige la variable que tiene el mayor coeficiente de regresión absoluto ( $|\beta_j|$ ).
2. El tamaño de incremento en otras variables es  $\Delta x_i = \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\beta}_j/x_j}$   $i=1,2,3,4,\dots,k \ i \neq j$ .
3. Se convierte  $\Delta x_i$  de variables codificadas a variables naturales.

**Ejercicio 4.27.**

Un ingeniero químico está interesado en determinar condiciones de operación que maximizan el rendimiento de un proceso. Hay dos variables de control que influyen, tiempo de reacción y temperatura de reacción, el punto de operación actual es 35 minutos y 155 °F queda un rendimiento del 40 %, aproximadamente. Se hace un diseño experimental variando el tiempo, 30 a 40 minutos y la temperatura, de 150 a 160 °F. Por simplicidad se codifican las variables en intervalo  $(-1,1)$ . Si las variables codificadas son  $X_1$  y  $X_2$ , las variables naturales son  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  se tiene que  $X_1 = \frac{(\varepsilon_1 - 35)}{5}$  y  $X_2 = \frac{(\varepsilon_2 - 155)}{5}$ .

**4.9.6. Modelos de segundo orden**

Son aquellos que permiten estudiar los efectos de la interacción y cuadráticos, aparte de los efectos lineales. Se usan debido a la necesidad de explorar una superficie más compleja y requiere caracterizarla.

El diseño experimental para ajustar a un modelo de segundo orden debe tener al menos tres niveles de cada factor  $(-1, 0, +1)$ . Así como el diseño de primer orden, en que se desea la Ortogonalidad, en este caso se desea un diseño rotatable, que es cuando la varianza de respuesta predicha en algún punto es función solo de la distancia del punto al centro y no es una fracción de dirección.

La selección de estos diseños depende de las características del problema, pues deben generalmente cumplir ciertos requisitos como capacidad para realizar estimaciones eficientes de los coeficientes del modelo y medir tanto el error experimental como la posible presencia de falta de ajuste.

La rotabilidad es una propiedad importante, pues la finalidad metodológica de las Superficies de Respuesta es optimizar y se desconoce la localización del óptimo. Por lo tanto, tiene sentido usar un diseño que proporcione estimaciones precisas en todas las direcciones. En los diseños rotables de segundo orden se incluyen:

La ecuación de segundo grado se presenta como:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^k \hat{\beta}_i X_i + \sum_{i=1}^k \hat{\beta}_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=2}^k \hat{\beta}_{ij} X_i X_j + \varepsilon$$



Tiene  $\rho = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$  términos, por lo que requiere al menos ese número de puntos en el diseño, que deben tener por lo menos tres niveles en cada uno de los factores para poder estimar la curva de superficie de respuesta en cada factor.

### 4.9.7. Diseño central compuesto

Los diseños compuestos centrales se presentan como alternativa a los diseños factoriales  $3^k$ . Cuando se busca un modelo cuadrático es uno de diseños más usados, por su flexibilidad. Un diseño central consiste en:

1. Inicia con un diseño factorial o factorial fraccionado a dos niveles, codificados habitualmente como  $\pm 1$ .
2. El número ( $\geq 1$ ) de puntos centrales, sirven para examinar la presencia de curvatura, dar información sobre efectos cuadráticos y estimar la magnitud del error experimental.
3. Parte axial: puntos axiales o puntos estrella en ejes correspondientes a cada uno de los factores.

Consiste en un factorial fraccionario  $2^k$ , donde los factores son codificados tal que el centro sea  $(0,0,0,0,\dots,0)$ , aumentando por  $2^k$  puntos axiales  $(\pm \alpha, 0, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, \pm \alpha, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 0, \pm \alpha, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 0, 0, \pm \alpha, \dots, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 0, \dots, \pm \alpha)$  y  $n_c$  puntos centrales  $(0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ . Según Montgomery (2012), este diseño es probablemente el más usado.

Tal que, el número total de puntos del diseño  $N = 2^k + 2 * k + n_0$

Donde;

$N$ : número total de puntos del diseño

$2^k$ : número de variables o factores

$k$ : puntos axiales

$n$ : corridas ó pc (puntos Centrales)

Mientras que  $\alpha = 2$  niveles a ser estudiados  $(-1.4142, 1.4142)$ ,  $\alpha = 2^{k/4}$ . Los valores  $\alpha$  en diferentes niveles son:

K	2	3	4	5	6
A	±1.4142	±1.6818	±2.0000	±2.3784	±2.8284

Los diseños centrales compuestos pueden construirse a partir de un diseño de primer orden  $2^k$  sin más que agregar puntos axiales y quizás puntos centrales. Estos diseños son posiblemente, más usados para ajustar superficies de respuesta de segundo orden. La distancia de los puntos axiales al origen, denotado por  $\alpha$ , varía según las propiedades que se desean en el diseño. Las propiedades más buscadas, generalmente, son rotabilidad, ortogonalidad y precisión uniforme.

Este diseño se convierte en rotable o girable si la varianza de respuesta predicha ( $\hat{y}$ ), en algún punto  $x$ , es una función sólo de la distancia al punto desde el centro del diseño y no es función de la dirección. Un diseño central compuesto se hace rotable mediante la elección apropiada del espaciamiento axial  $\alpha$ .

Si el diseño es rotable, la desviación estándar (o varianza) de respuesta predicha  $\hat{y}$  es constante en todos los puntos que están a la misma distancia del centro del diseño. La rotabilidad en un diseño factorial completo a dos niveles, se elige un valor  $\alpha = (2^k)^{1/4}$ .

Por ejemplo, si se considera que la respuesta es el rendimiento, la predicción tendrá la misma precisión para todos los puntos que se encuentran a la misma distancia del centro del diseño. Esta propiedad de rotabilidad tiene importancia en la exploración de la suma de la superficie de respuesta, pues la precisión de superficie estimada no depende de la orientación del diseño con respecto a la superficie de respuesta real.

Cuando se tienen  $r_f$  réplicas del factorial  $2^k$  y  $r_a$  réplicas de puntos  $\alpha = \left(\frac{r_f 2^k}{r_a}\right)^{1/4}$ .

Cuando se usa un factorial fraccionado  $2^{k-p}$ , como base del diseño central compuesto, se escogerá  $\alpha = \left(\frac{r_f 2^{k-p}}{r_a}\right)^{1/4}$ .

Finalmente, mediante la elección de  $\alpha$ , estimada mediante  $\alpha = (nf)^{1/4}$ . Donde,  $f$  es número de puntos en porción factorial del diseño.

Asimismo, otra propiedad útil del diseño es que puede “crecer” a partir de un diseño  $2^k$  de primer orden, agregando puntos axiales y quizá algunos puntos centrales. Con la elección del número de puntos centrales ( $n_0$ ) el diseño puede hacerse Ortogonal o transformarse en uno de precisión uniforme. Tal que, en un diseño de precisión, la varianza de respuesta predicha en origen es igual a la

predicha a una distancia unitaria del origen. Este proporciona mayor protección que el Ortogonal contra el sesgo de coeficientes por la presencia de términos de tercer y mayor orden.

La ortogonalidad es una propiedad importante en los diseños. Para un modelo de primer orden es la propiedad de diseño óptima, pues minimiza la varianza de los coeficientes de regresión. Se considera que un diseño es ortogonal cuando los coeficientes estimados en un modelo ajustado no están correlacionados entre sí (independencia). Una propiedad de los diseños centrales compuestos es que mediante la elección apropiada de los diseños centrales el diseño puede hacerse ortogonal o, en otras palabras, las estimaciones de parámetros para el modelo de segundo orden están mínimamente correlacionadas con los estimadores de otros parámetros.

Box y Wilson (1951), citados por Vásquez (2014), han demostrado que para dar la propiedad de ortogonalidad al diseño se elige el valor de  $\alpha$  como:

$$\alpha = \left[ \frac{(2^k \times N)^{\frac{1}{2}} - 2^k}{2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Donde,

$N$ : número total de corridas del diseño

Así, se tiene un valor específico de  $\alpha$  que haga el diseño rotatable, se puede determinar el número de puntos centrales que lo hará rotatable y ortogonal o perpendicular. En diseños en que se busque rotabilidad, simultáneamente, se debe cumplir con valores específicos para  $\alpha$  y  $n_0$ . Los valores que deben tomar son  $\alpha = (2^k)^{\frac{1}{4}}$  y  $n_0 = 4(2^k)^{\frac{1}{2}} + 4 - 2^k$ .

Se dice que un diseño es de precisión uniforme si la varianza de respuesta predicha  $V[\hat{y}(x)]$  en el centro del diseño (radio,  $r = 0$ ), es la misma que en la esfera de radio,  $r = 1$ . Esto es, se tiene la varianza constante dentro de la esfera unitaria. Box y Hunter (1966), citados por Vásquez (2014), demuestran que para conseguir un diseño rotatable con precisión uniforme o casi uniforme se selecciona:

$$\alpha = (2^k)^{\frac{1}{4}} \text{ y } n_0 = \lambda_4 (2^k + 2) + 2 - 2^k.$$

Conociendo que  $\lambda_4$  es la constante que depende de  $k$ , número de factores a usar.

#### 4.9.8. Diseño equirradial

Consiste en puntos igualmente espaciados sobre una circunferencia o esfera. Para  $K = 2$ , el diseño se obtiene combinando  $n_2 \geq 5$  puntos igualmente espaciados sobre una circunferencia con  $n_1 \geq 1$  puntos en su centro. El pentágono y hexágono son útiles en este caso.

Para  $K = 3$ , los únicos arreglos que cuentan con puntos suficientes para estimar todos los parámetros son el icosaedro, poliedro de veinte caras, convexo o cóncavo tal que si las veinte caras del icosaedro son triángulos equiláteros y congruentes, iguales entre sí, el icosaedro es convexo y se denomina regular, siendo entonces uno de los llamados sólidos platónicos y dodecaedro, poliedro conjugado del icosaedro; es decir, poliedro de doce caras, convexo o cóncavo tal que sus caras han de ser polígonos de once lados o menos, pero si las doce caras del dodecaedro son pentágonos regulares, iguales entre sí, el dodecaedro es convexo y se denomina 'regular', siendo entonces uno de los llamados sólidos platónicos.

#### 4.9.9. Diseño Box-Behnken

Estos diseños se forman combinando factoriales  $2^k$  con diseños de bloques incompletos. Los diseños resultantes suelen ser más eficientes en términos del número de corridas requerido. Además, son rotables o casi rotables y hace la estimación de los coeficientes de primer y segundo orden más eficiente.

#### 4.9.10. Tendencias polinomiales o polinomios ortogonales

Son ecuaciones de regresión en que cada una está asociada con un exponente de la variable independiente o exógena  $X$  ( $X^1, X^2, X^3, X^4, \dots, X^n$ ) tal que todas son mutuamente independientes o, en otras palabras, Ortogonales.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Abarca, A., Alpízar, F., Sibaja, G. y Rojas, C. (2013). *Técnicas cualitativas de investigación*. San José, Costa Rica: UCR.
2. Arriaza, G., A. J., et. al. 2008. *Estadística Básica con R y R-Commander*
3. Babbie, E. R. (2001 ). *The practice of social research* (9a edición ). Belrnont, CA: Wadsworth Publishing .
4. Bergman, M. M. (Ed.). (2008). *Advances in Mixed Method Research*. Thousand Oaks, CA: SAGE
5. Box, G. E., Hunter J. S. y Hunter, W. G. 2008. *Estadística para Investigadores. Diseño, innovación y descubrimiento*. 2da. Edición. Editorial Reverté
6. Box, G.E.P.; Wilson, K.B. (1951). «On the Experimental Attainment of Optimum Conditions». *Journal of the Royal Statistical Society: Series B* 13 (1): 1-45.
7. Buitrago, A. R. 2009. *Álgebra Lineal*. Editor: Universidad Militar Nueva Granada.
8. Capa, S. H. 2015. *Probabilidades y estadística para una gestión científica de la información*. Escuela Politécnica Nacional.
9. Creswell, J. (2005). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Upper Saddle River: Pearson Education.
10. David F. Hendry, Kmenta (J.). *Elements of Econometrics, The Economic Journal*, Volume 82, Issue 325, 1 March 1972, Pages 221–222, <https://doi.org/10.2307/2230221>
11. Daza P. J. F. 2006. *Estadística Aplicada con Excel*. Mexico: Limusa Wiley

12. Daza, P. J. F. 2014. *Tablas Estadísticas*. Mexico: Limusa Wiley
13. Díaz, C. M. A y Gómez, M. P. 2011. *Comportamiento de volatilidad del tipo de México 1970 a 2010*. UMSNH. Morelia, México
14. Diccionario de *Sinónimos, Antónimos y Parónimos*. 2008. Arquetipo Grupo Editorial
15. Galindo, D. T. E. 2006. *Estadística. Métodos y Aplicaciones*. Prociencia Editores. Quito, Ecuador
16. García L., J. y Lara P., A.M. 1998. *Diseño Estadístico de Experimentos. Análisis de la Varianza*. Grupo Editorial Universitario
17. Garmer, S. G. y Walker, W. M. 1985. *Pairwise multiple comparisons of treatment means in agronomic research*.
18. Gómez, G. M; Danglot, B. C. y Vega, F. L. 2003. *Sinopsis de pruebas estadísticas no paramétricas. Cuando usarlas*. Revista Mexicana de Pediatría. Número 2. Vol. 70
19. González, B, G. 1985. *Métodos Estadísticos y Principios de Diseño Experimental*. 2da Ed. Facultad de Ciencias Agrícolas. Universidad Central del Ecuador
20. González, B. G. 2010. *Métodos Estadísticos y Principios de Diseño Experimental*.
21. Granville, W. A. 2009. *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Limusa. 278-296 Pp.
22. Grossman, S. I. y Flores, G. J. J. 2012. *Álgebra Lineal*.
23. Gutiérrez, P. H. y De la Vara, S. R. 2008. *Análisis y diseño de experimentos*. 2da Ed.
24. Gujarati, D. N. y Porter, D. C. 2010. *Econometría*. McGraw Hill. Tercera Edición. Impreso en Colombia
25. Gutiérrez, G. E. y Ochoa, G. S. I. 2014. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Grupo Editorial Patria, S. A. de C. V.

26. Herbert A. Simon: *Models of Bounded Rationality*. Volume 1: Economic Analysis and Public Policy. Volume 2: Behavioural Economics and Business Organization: 1982 (reprinted 1983), Cambridge, MA: MIT Press. 478, 505 pages
27. Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptis, L. M. 2010. *Metodología de la investigación*. Mexico: Limusa Wiley
28. Hsu, J. C. 1996. *Multiple Comparisons. Theory and methods*. Department of statistics. USA
29. Hurtado, M. J. y Gómez, F. R. 2010. *Diseño Experimental*.
30. Jhonston, J. 1972. *Econometric. Methods*. 2nd edition. McGraw Hill Company. New York
31. Kmenta, J. (1971) *Elements of Econometrics*. 2nd Edition. Macmillan Publishing Company, New York.
32. Kuehl, R. O. 2001. *Diseño de Experimentos*. Principios Estadísticos para Diseño y Análisis de Investigaciones
33. Lara P., A.M. 2000. “*Diseño Estadístico de Experimentos, Análisis de la Varianza y Temas Relacionados: Tratamiento Informático mediante SPSS*” Proyecto Sur de Ediciones
34. Lara, A. J. 2007. *Análisis Matemático*. Mexico: Limusa Wiley
35. Lay, D. C. 2012. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Ed. Pearson Education. 4ta Edición
36. Leek, J. T. & Peng, R. D. 2015. Nature. Obtenido de [www.nature.com/articles/520612a.pdf](http://www.nature.com/articles/520612a.pdf)
37. Levin R, Rubin D. *Estadística para administradores*. México: Prentice-hall. 1996.
38. Lind. D. A., Marchal, W.G. & Mason, R. D. 2006. *Estadística para Administración y Economía*. 11va Ed. Ed. Alfaomega
39. López, B. E. A. y González, R. B. H. 2014. *Diseño y Análisis de Experimentos. Fundamentos y Aplicaciones en Agronomía*. Mexico: Limusa Wiley

40. Martínez, C. M., & Sepúlveda, M. A. R. (2012). *Introducción al análisis factorial exploratorio*. Revista colombiana de psiquiatría, 41(1), 197-207.
41. Mendiburu, F. 2010. *Manual práctico para uso de agricolae*. Versión 1.0.9. Facultad de economía y planificación. Departamento de Estadística e Informática. Universidad Agraria La Molina
42. Mertens, D. (2005). *Research and evaluation in Education and Psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. Thousand Oaks: Sage.
43. Montgomery, D. C. 2004. *Diseño y análisis de experimentos* (2a. ed.). Mexico: Limusa Wiley
44. Montgomery, D. C. 2012. *Design and analysis of experiments* (3a. ed.). Mexico: Limusa Wiley
45. Mora, W. F. 2016. *Cálculo en Varias Variables*. Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática
46. Mora, W. F. 2019. *Cálculo en Varias Variables*. Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática
47. Navidi, W. 2006. *Estadística para ingenieros y científicos*. Editorial McGrawHill. 368-382 Pp.
48. Padrón, J. (2006). *Sobre Modelos. Tutorial paso-a-paso. Fundación Línea de Investigación en la Enseñanza/Aprendizaje de la Investigación*. Maracaibo.
49. Padrón, C. E. 1996. *Diseños Experimentales con Aplicación a Agricultura y Agronomía*. Editorial McGrawHill.
50. Pagano R. *Understanding statistics in the behavioral sciences*. Canada: Wadsworth, Cengage learning. 2009.
51. Parra, R. F. 2016. *Curso de Estadística con R*. Instituto Cántabro de Estadística. Santander, Cantabria
52. Ramírez, M., P. P. 2010. *Introducción a la Econometría*. CIESTAAM. Universidad Autónoma Chapingo, México
53. Rodríguez, V. J. A., Steegmaan, P. C. y Juan, P. A. A. 2016. *Determinantes*. Editorial McGrawHill.



54. Rojas, C. L. E. y Rojas, C. L. 2000. *Exploración al diseño experimental*. Ciencia e ingeniería neogranadina. Editorial McGrawHill.
55. Rojas, G. 2017. *Cálculo integral. Cálculo en una variable. Ciencias básicas*. Escuela Politécnica Nacional. Segunda Edición. EPN Editorial
56. Selltiz, Jahoda, Deutsch y Cook (1980) *Métodos de investigación en las relaciones sociales*. Madrid: Rialp. Existe una versión similar de este texto, cuyos autores son Selltiz, Wrightsman, Deustch y Cook.
57. Solomon, R. L., (1949). *An extensión of group desing. Psychological Bulletin*, 46, 137-150.
58. *Sistema Internacional de Unidades*. 2006. OFDPYM
59. *Sistema Internacional de Unidades*. 2009. INEN
60. Spiegel, M.R.; Schiller, J. y Srinivasan, R. A. 2007. *Análisis de la varianza. Probabilidad y Estadística. Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistics*. Schaum. 2ª edición). México D.F. Edit. McGraw-Hill.
61. Tejedor, T., F. J. 1999. *Análisis de varianza*. Schaum. Madrid. Edit. La Muralla S.A.
62. Thomas, G. B. Jr. 2006. *Cálculo. Una Variable*
63. Tirado, D. A., I. y Dutta, M. 1982. *Métodos Económicos*. South-Western. Puerto Rico
64. Triola, F. M. 2004. *Estadística*. 9na Edición. Editorial Pearson Addison Wesley. 372-382 Pp.
65. Vásquez, A. V. 2014. *Diseños Experimentales con SAS*. 2a. ed. Edita Concytec-Fondecyt, Lima-Perú.
66. Vicéns, O. J., Herrarte, S. A y Medina, M. E. 2005. *Análisis de la Varianza*. Editorial McGrawHill.
67. Wackerly, D. D., Mendenhall III, W. y Scheaffer, R. L. 2010. *Estadística matemática con aplicaciones*. 7ma Edición. Editorial CENGAG Learning. 513, 796-819 Pp.

68. Wasserstein RL Lazar NA. *The ASA's statement on P-values: context, process, and purpose*. Am Stat. 2016;70(2):129-133.
69. Williams, M., Grinnell, R. M., & Unrau, Y. A. (2005). *Case levels design*. En R. M. Grinnell & Y. A.
70. Wiersma y Jurs (2008). *Ética de la investigación*. México: McGraw-Hill.
71. Unrau (Eds.), *Social work: Research and evaluation. Quantitative and qualitative approaches* (7.a ed., pp. 171-184). New York: Oxford University Press.
72. Zill, D. G. y Wright, W. S. 2011. *Cálculo. Trascendentes tempranas*. 4ta. Edición
73. Zúñiga, R. E. 2010. *Diseño en Parcelas Divididas*. Editorial McGrawHill.

El objetivo del Diseño experimental es establecer relaciones causa-efecto entre una o más variables exógenas respecto a una o más variables endógenas con el fin de revelar las causas principales de variación en la respuesta, encontrar las condiciones experimentales con que se obtiene un valor extremo en la variable de interés, variabilidad controlada en laboratorio o in situ con el objeto de variar condiciones habituales de un proceso para aumentar la probabilidad de detectar cambios significativos en la respuesta, comparar respuestas con diferentes niveles de experimentación en variables controladas y estimar un modelo matemático-estadístico que permita hacer predicciones con un nivel de confiabilidad estadística e intervalos de confianza mínimos aceptables respecto a predicciones futuras, regresiones lineales simples o múltiples.

**Moisés Arreguín Sámano.** Ph. D. en Matemática (c). Profesor e investigador de Ingeniería en Gestión del Riesgo, Facultad de Ciencias de la Salud y del Ser Humano y Agroindustrias, Facultad de Ciencias Agropecuarias, Recursos Naturales y del Ambiente, Universidad Estatal de Bolívar. Maestro en Ciencias en Ciencias Forestales, División de Ciencias Forestales (DICIFO) e Ingeniero Forestal, División de Ciencias Forestales (DICIFO), Universidad Autónoma Chapingo (UACH).

**Andrea Damaris Hernández-Allauca.** Ph. D. en Matemática (c). Magíster en Ciencias de la Educación-Aprendizaje de la Matemática (UNACH), Licenciada en Ciencias de la Educación-Profesora en Ciencias Exactas. Docente investigadora de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) en el Grupo de Investigación y Transferencia de Tecnologías en Recursos Hídricos (GITRH) y Grupo de Investigación en Turismo (GITUR).

**Mario Humberto Paguay Cuvi.** Doctor en Matemáticas (ESPOCH), Magister en Matemáticas (ESPOCH), formación en Matemáticas Discretas en la Universidad de Oriente( Cuba). Actualmente, Docente en la Facultad de Informática y Electrónica (ESPOCH)

ISBN: 978-9942-44-447-9

